EINIGE FOLGERUNGEN AUS EINER IDENTITÄT FÜR ELEKTROMAGNETISCHE FELDER

Von J. Meixner

Technische Hochschule Aachen*

(*Eingegangen am 15. Juni 1964*)

Es wird eine beliebige Verteilung von ruhender Materie in einem statischen Magnetfeld B zugrude gelegt. Diesem Magnetfeld wird ein elektromagnetisches Feld überlagert, das von einem schwachen eingeprägten elektrischen Feld $\boldsymbol{E}^e(r, t)$ erzeugt wird, welches einen Einschaltvorgang darstellt. Es werden zunächst die Materialgleichungen besprochen; sie werden als lokal angenommen, enthalten aber Nachwirkung. Aus einer bilinearen Identität fur zwei elektromagnetische Felder der angegebenen Art läßt sich dann eine wesentliche Verallgemeinerung des Maxwell'schen Reziprozitätstheorems gewinnen, dessen Wurzel jedoch nicht mehr die Maxwell'schen Gleichungen, sondern die Onsager-Casimir'schen Reziprozitätsrelationen und damit die Thermodynamik irreversibler Prozesse ist. Weiterhin erhält man einen einfachen allgemeinen Beweis für ein bekanntes Theorem über äquivalente elektrische Netzwerke. Wesentliches Hilfsmittel ist die Theorie der linearen passiven Systeme.

1. *Einleitung*

In der Theorie der elektromagnetischen Wellenfelder spielen Punktquellen eine wichtige Rolle. Man bildet sich die Vorstellung von schwingenden elektrischen oder magnetischen Dipolen oder auch von Multipolen, welche das Feld erzeugen. Dieses ergibt sich dann aus den Maxwell'schen Gleichungen und den Materialgleichungen, wozu noch die Ausstrahlungsbedingung tritt. Allgemeiner interessiert das elektromagnetische Feld, das von einer zeitlich veränderlichen Stromverteilung oder von einer räumlichen Verteilung von schwingenden Dipolen erzeugt wird. Es kann prinzipiell mit Hilfe des Vektorpotentials und des skalaren Potentials ermittelt werden.

Eine wichtige Frage in diesem Zusammenhang ist: Wo kommt die Stromverteilung her? In einer konsequenten Theorie sollte man nicht die Stromverteilung als gegeben ansehen, sondern die eingeprägte elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}^e(r, t)$, die durch die thermischen und chemischen Felder bestimmt ist. Eine solche gibt es aber nicht im Vakuum, sondern nur in der kontinuierlichen Materie. Damit verlieren aber auch die retardierten Potentiale ihre Anwendbarkeit, da sie sich auf Strom- und Ladungsverteilungen im Vakuum beziehen,

* Adresse: Technische Hochschule 51 Aachen Deutschland.

es sei denn, daß man sich auf den Standpunkt der Elektronentheorie stellt. Dann hat man aber wiederum nicht mehr die Materialgleichungen zur Verfügung und muß sie durch komplizierte kinetische Gleichungen ersetzen.

Wir wollen deshalb im folgenden einige allgemeine Aussagen über das elektromagnetische Feld machen, welches in ruhender kontinuierlicher Materie durch ein eingeprägtes elektrishes Feld $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ erzeugt wird. Die elektromagnetischen Eigenschaften der Materie sollen durch Materialgleichungen beschrieben werden, die überdies als linear angenommen werden.

Als erstes werden einige allgemeine Aussagen über die Materialgleichungen entwickelt werden. Sie finden ihre Anwendung in einer wichtigen Identität. Aus ihr fließen eine Verallgemeinerung des Maxwell'schen Reziprozitätstheorems und ein neuer Beweis eines Theorems über äquivalente Netzwerke.

2. *Die Materialgleichungen*

Die Maxwell'schen Hauptgleichungen lauten

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{J}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varrho, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{2.2}$$

In diesen Gleichungen kommen die Eigenschaften der den Raum erfüllenden Materie nicht zum Ausdruck. Erst durch Hinzufügung der sogenannten Materialgleichungen werden die Maxwell'schen Gleichungen zu einem vollständigen Gleichungssystem in dem Sinne, daß man Anfangs- und Randwertprobleme eindeutig lösen kann.

Die Materialgleichungen besagen wie der elektrische Verschiebungsvektor $\boldsymbol{D}$ und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ von der elektrischen Feldstäke $\boldsymbol{E}$ und von der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ abhängen. Bei zeitabhängingen Feldern können die Materialgleichungen recht kompliziert sein. So können $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{B}$ im Punkte P zur Zeit t von den Werten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ zu allen früheren Zeitpunkten $t-s$ $(0 \leqq s < \infty)$ und auch in allen Raumpunkten Q, die nicht mehr als um cs von P entfernt sind, abhängen (c = Lichtgeschwindigkeit). Die Abhängigkeit ist im allgemeinen nicht-linear.

Wir beschränken uns hier auf lineare Abhängigkeiten wie sie bei kleinen Feldstärken gegeben sind. Wir sehen ferner von nicht-lokalen Materialgleichungen *ab*. Wir beschänken uns somit auf linears Nachwirkungsverhalten, lassen aber ausdrücklich Anisotropie der Materie zu.

Sind also in einem Volumenelement $\boldsymbol{E}(t)$ und $\boldsymbol{H}(t)$ als Funktionen der Zeit vorgegeben, so sind $\boldsymbol{D}(t)$ und $\boldsymbol{B}(t)$ lineare Funktionale der Funktionen $\boldsymbol{E}(t)$ und $\boldsymbol{H}(t)$.

Man hat in der Tat unter diesen Voraussetzungen sogar ein lineares passives System vorliegen, welches den 6 Grössen $E_i(t)$, $H_i(t)$ die 6 Größen $D_i(t)$ und $B_i(t)$ zuordnet (die Indices bezeichnen jeweils die drei Komponenten des betreffenden Vektors), da diese Zuordnung wegen der Annahme schwacher Felder linear ist, da sie translationsinvariant in der Zeit ist, wenn das Material nicht durch eine andere Einwirkung zeitlich verändert wird, und da schließlich allgemein die Passivitätseigenschaft.

$$\int_{-\infty}^{\tau} (\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}})\, dt \geqq 0 \qquad (\text{alle } \tau), \tag{2.3}$$

für Einschaltvorgänge besteht. Sie ist eine einfache Folge des Poynting'schen Satzes der Maxwell'schen Theorie, wenn man speziell homogene Felder annimmt und sie besagt physikalisch, daß die von der eingeprägten elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}^e(t)$ gelieferte Energie bei allen Einschaltvorgängen stets nicht-negativ ist.

Da wir lokale Materialgleichungen angenommen hatten, konnte die Passivitätseigenschaft (2.3) unter Zugrundelegung homogener Felder begründet werden.

Die Theorie der linearen passiven Systeme gibt Darstellungstheoreme für solche lineare passive Systeme [1], [2]. Die einfachste Darstellung hat man für Einschaltvorgänge, die nicht vor $t = 0$ beginnen und für alle t mit ihren zwei ersten Ableitungen stetig sind. Man erhält dann für die Laplace-Transformierten $\boldsymbol{E}(p)$, ... der Vektoren $\boldsymbol{E}(t)$, ... die Gleichungen

$$D_i(p) = \varepsilon_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) E_k(p) + \lambda_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) H_k(p), \tag{2.4}$$

$$B_i(p) = \nu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) E_k(p) + \mu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)\, H_k(p), \tag{2.5}$$

Hiermit haben wir bereits eine Verallgemeinerung vorgenommen, indem das interessierende schwache elektromagnetische Feld $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ einem beliebigen statischen Magnetfeld mit der Induktion $\boldsymbol{B}_0$ überlagert ist. Daher hängen die Koeffizienten ε_{ik} *etc.* auch von $\boldsymbol{B}_0$ ab. Auch für $\boldsymbol{B}_0 \neq 0$ ist die Zuordnung $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ ein lineares passives System, wie man aus den thermodynamischen Stabilitätsbedingungen im elektromagnetisches Feld folgern kann [3].

Die Passivitätseigenschaft (2.3) findet ihren Ausdruck darin, daß die 6×6-Matrix

$$\begin{Vmatrix} p\varepsilon_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0), & p\lambda_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) \\ p\nu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0), & p\mu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0), \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

eine sogenannte positive reelle Matrix ist, d. h. daß ihre quadratische Form für alle Werte von p in der komplexen p-Ebene mit $\mathrm{Re}\, p > 0$ reguläranalytisch ist, positiven Realteil hat und für reelle p reell ist [2]. Aus der Darstellungstheorie positiver, reeller Matrizen gewinnt man zunächst folgende Aussagen für die Matrixelemente

$$\varepsilon_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = \varepsilon_{ki}(o, \boldsymbol{B}_0), \quad \lambda_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = \nu_{ki}\,(o, \boldsymbol{B}_0),$$
$$\mu_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = \mu_{ki}(o, \boldsymbol{B}_0). \tag{2.7}$$

Weiter muß man verlangen, daß die Gleichungen (2.4) und (2.5) im Gleichgewichtsfall, d. h. $p = 0$, keine Zeitrichtung auszeichnen; da mit Umkehr von t in $-t$ auch H, B und B_0 ihr Vorzeichen wechseln, muß man also fordern, daß

$$\varepsilon_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = +\varepsilon_{ik}(o, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.8}$$

$$\lambda_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = -\lambda_{ik}(o, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.9}$$

$$\nu_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = -\nu_{ik}(o, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.10}$$

$$\mu_{ik}(o, \boldsymbol{B}_0) = +\mu_{ik}(o, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.11}$$

Die Tensoren λ_{ik} und ν_{ik} verschwinden daher allgemein im Gleichgewicht, wenn gleichzeitig $B_0 = 0$ ist.

Falls $p \neq 0$ ist, kann man weder Gleichungen vom Typ (2.7) noch solche der Art (2.8) bis (2.11) deduzieren. Jedoch liefern dann die Onsager- Casimir'schen Reziprozitäsbeziehungen gewisse Symmetrieeigenschaften. Diese sind

$$\varepsilon_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) = \varepsilon_{ki}(p, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.12}$$

$$\lambda_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) = -\nu_{ki}(p, -\boldsymbol{B}_0) \tag{2.13}$$

$$\mu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) = \mu_{ki}(p, -\boldsymbol{B}_0), \tag{2.14}$$

und man überzeugt sich leicht, daß sie auch für $p = 0$ gelten, d. h. für $p = 0$ aus (2.7) und aus (2.8) bis (2.11) gewonnen werden können.

Das Ohm'sche Gesetz ist auch im allgemeinen, soweit man sich auf den linearen Bereich beschränkt, durch eine Widerstandsmatrix, die von p und $\boldsymbol{B}_0$ abhängt, darzustellen. Wir schreiben es in Laplace-Transformierten als

$$E_i(p) = \varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) J_k(p). \tag{2.15}$$

Auch diese Zuordnung $\lambda E_i \rightarrow J_k$ ist eine lineare passive und daher ist auch $\varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)$ eine positive reelle 3×3 Matrix. Bei Vorliegen von eingeprägten elektrischen Feldstärken E^e ist (2.15) zu ergänzen:

$$E_i(p) + E_i^e(p) = \varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) J_k(p). \tag{2.16}$$

Die Onsager-Casimir'schen Reziprozitätsbeziehungen liefern

$$\varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0) = \varrho_{ki}(p, -\boldsymbol{B}_0). \tag{2.17}$$

Bei Vorliegen von Symmetrien treten natürlich die entsprechenden Vereinfachungen der Materialtensoren ε_{ik} usw. ein.

3. *Eine Identität*

Wir legen eine beliebige Verteilung von Materie zugrunde; sie kann isotrop oder anisotrop sein. Außerhalb einer gewissen Kugel soll jedoch Vakuum vorliegen.

Wir setzen die Materie als ruhend und isotherm voraus und vernachlässigen damit die mechanischen Wirkungen des Feldes auf die Materie.

Ferner nehmen wir überall die Gültigkeit der Materialgleichungen (2.4), (2.5) und (2.15) an, wobei aber jetzt die Koeffizienten ε_{ik} usw. auch Funktionen des Ortes sind.

Wir betrachten nun ein statisches Magnetfeld $\boldsymbol{B}_0(r)$, dem ein schwaches elektromagnetisches Feld $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ überlagert ist, welches von einem eingeprägten elektrischen Feld $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ erzeugt wird. Daneben betrachten wir mit derselben Materieverteilung das statische Magnetfeld $-\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$, dem ein schwaches elektromagnetisches Feld $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{B}'$ überlagert ist, welches von einem eingeprägten elektrischen Feld $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t')$ erzeugt wird. Im zweiten Feld haben wir die Zeitvariable mit t' bezeichnet und t' soll zunächst von t unabhängig sein.

Man gewinnt dann aus den Maxwell'schen Hauptgleichungen (2.1) und (2.2) die folgende

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 1

Identität:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{J} &= p(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{H}'\cdot\boldsymbol{B})-p'(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}') \\ &+ \operatorname{div}(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}'). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sie ist auf eine der folgenden elektrischen Weisen zu verstehen.

1. Die eingeprägten elektrischen Felder haben die Zeitabhängigkeit e^{pt} bzw. $e^{p't'}$, wobei p und p' beliebige komplexe Werte mit positivem Realteil haben können. Dann haben auch die verschiedenen Feldgrößen $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ usw. $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{D}'$ usw. die Zeitabhängigkeit e^{pt} bzw. $e^{p't'}$ und (3.1) ist eine gewöhnliche Gleichung.

2. Die eingeprägten elektrischen Felder $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t')$ werden nicht vor $t = 0$ bzw. $t' = 0$ eingeschaltet und die Feldvektoren in (3.1) sind als die Laplace-Transformierten der eigentlichen Feldvektoren aufzufassen, z. B.

$$\boldsymbol{E} = \int_0^\infty e^{-pt}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)dt,$$

$$\boldsymbol{E}' = \int_0^\infty e^{-p't'}\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}, t')dt'. \tag{3.2}$$

3. Die Gleichung (3.1) gilt für die eigentlichen Felder, aber p und p' sind Operatoren,

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p' = \frac{d}{dt'}$$

Mit jeder dieser Interpretationen sind die Materialgleichungen (2.3), (2.5) und (2.15) anwendbar. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik}(p', -\boldsymbol{B}_0), \tag{3.3}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^e\cdot\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{E}^{e'}\cdot\boldsymbol{J} &= J_i'\,(\varrho_{ik}-\varrho'_{ki})J_k \\ &+E_i'(p'\varepsilon'_{ki}-p\varepsilon_{ik})E_k \\ &+E_i(p'\lambda'_{ik}+p\nu_{ki})H_k' \\ &-E_i'(p'\nu'_{ki}+p\lambda_{ik})H_k \\ &+H_i(p\mu_{ki}-p'\mu'_{ik})H_k' \\ &+\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}'-\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nun machen wir noch von den Symmetrieeigenschaften (2.12), (2.13), (2.14), (2.17) Gebrauch und erhalten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^e\cdot\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{E}^{e'}\cdot\boldsymbol{J} &= J_i'(\varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)-\varrho_{ik}(p', \boldsymbol{B}_0)]J_k \\ &+E_i'[p'\varepsilon_{ik}(p', \boldsymbol{B}_0)-p\varepsilon_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)]E_k \\ &+E_i[p\nu_{ki}(p, \boldsymbol{B}_0)-p'\nu_{ki}(p', \boldsymbol{B}_0)]H_k' \\ &+E_i'[p'\lambda_{ik}(p', \boldsymbol{B}_0)-p\lambda_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)]H_k \\ &+H_k[p\mu_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)-p'\mu_{ik}(p', \boldsymbol{B}_0)]H_i' \\ &+\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}'-\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 1

4. *Die verallgemeinerte Admittanz*

Geben wir uns $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ vor derart, daß dieses Feld für $t \to -\infty$ stärker als jede negative Potenz von $|t|$ verschwindet und verlangen wir ferner, daß keine elektromagnetischen Wellen vom Unendlichen herinkommen, so ist das erzeugte elektromagnetische Feld eindeutig bestimmt. Man kann den Beweis hierfür erbringen, indem man $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t) = 0$ annimmt, den Poynting'schen Satz anschreibt, über den ganzen Raum und über die Zeit von $-\infty$ bis τ (τ beliebig) integriert. Aus der Tazsache, daß die Matrix (2.6) und die Widerstandsmatrix $\varrho_{ik}(p, \boldsymbol{B}_0)$ posizive Matrizen sind, kann man dann auf $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} = \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} = 0$ schließen. Mit anderen Worten, wenn die vom eingeprägten Feld gelieferte Energie verschwindet, dann kann sich allein aus energetischen Gründen kein elektromagnetisches Feld aufbauen.

Wir schreiben den Poynting'schen Satz nun für ein vorgegebenes eingeprägtes Feld $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ an. Er lautet

$$\boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_i \varrho_{ik} \boldsymbol{J}_k + \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}} + \operatorname{div} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{4.1}$$

Integriert man nun über den ganzen Raum, so ergibt sich

$$\int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, dV = \int (J_i \varrho_{ik} J_k + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}' + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) dV \tag{4.2}$$

da das Divergenzglied zu einem Oberflächenintegral über die unendlich ferne Kugel führt, wo das erzeugte elektromagnetische Feld stärker als jede negative Potenz von r verschwindet. Integriert man nun noch die Gleichung (3.1) nach t von $-\infty$ bis τ, so folgt wiederum auf Grund der Tatsache, daß (2.6) und $\varrho_{ik}(p, B_0)$ positive Matrizen sind,

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\tau} dt \int \boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J} dV \geqq 0. \tag{4.3}$$

Die Zuordnung $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t) \to \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ stellt somit ein lineares passives System dar, wenn das „Produkt" von $\boldsymbol{E}^e$ und $\boldsymbol{J}$ durch das Volumenintegral des skalaren Produkts $\boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J}$ definiert wird. Das Superpositionsprinzip gilt ja allemal für schwache Felder und die Invarianz gegen Zeittranslation folgt aus der Zeitunabhängigkeit der Materialgleichungen (der Operator $p = \frac{d}{dt}$ wird ja ohnehin von einer Zeittranslation nicht berührt).

Die Theorie der linearen passiven Systeme führt für alle Erregungen $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$, die für $t \leqq 0$ verschwinden, zu einer Darstellung

$$\int_0^\infty e^{-pt} J_i(\boldsymbol{r}, t) dt = \int Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p, \boldsymbol{B}_0) \int_0^\infty e^{-pt} \boldsymbol{E}_k^e(\boldsymbol{r}_1, t) dt dV_1, \tag{4.4}$$

wo dV_1 Integration nach den Koordinaten des Radiusvektors r_1 bedeutet. Den Tensor $Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p, \boldsymbol{B}_0)$ bezeichnen wir als verallgemeinerte Admittanz. Er hat die Eigenschaft

$$\operatorname{Re} \int\int e_i^*(\boldsymbol{r}) Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p, \boldsymbol{B}_0) e_k(\boldsymbol{r}_1) dV dV_1 \geqq 0, \tag{4.5}$$

für alle Ortsfunktion $e_i(\boldsymbol{r})$ und alle p mit $\operatorname{Re} p > 0$.

Formal kann man die Laplace-Transformation in (4.4) rückgäng machen und erhält

$$J_i(\boldsymbol{r}, t) = \int ds \int K_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, s, \boldsymbol{B}_0) \boldsymbol{E}_k^e(\boldsymbol{r}_1, t-s) dV_1. \tag{4.6}$$

Wir sehen davon ab, hier über die Struktur des Kernes $K_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, s)$ nähere Angaben zu machen und verweisen dazu auf eine spätere Veröffentlichung von *H.* König. Es sei jedoch bemerkt, daß (4.6) für alle Erregungen $\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t)$ gilt, welche für $r \to -\infty$ stärker als jede negative Potenz von $|t|$ abnehmen. Im Kern $K_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0, s)$ kommt natürlich die Retardierung zum Ausdruck, und es muß daher $K_{ik} = 0$ sein, wenn $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| \geqq cs$ (c = Lichtgeschwindigkeit) keit) ist.

Die Materieverteilung wird somit durch die verallgemeinerte Admittanz $Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p; \boldsymbol{B}_0)$ bzw. durch den Kern $K_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0, s; \boldsymbol{B}_0)$ beschrieben. Bei bekannter Erregung $\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}, t)$ gibt (4.6) die Stromverteilung; aus dem Ohm'schen Gesetz (2.17) gewinnt man dann die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$. Die Maxwell'sche Gleichung $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$ erlaubt dann $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ zu berechnen, wobei die Integrationskonstante durch $\boldsymbol{B}(r, -\infty) = 0$ bestimmt ist. Schließlich geben die Materialgleichungen (2.4) und (2.5) die Felder $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, rt)$und $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$.

5. *Das Reziprozitätstheorem*

Wir nehmen an, daß die eingeprägten Felder in (3.5) die spezielle Gestalt

$$\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})e^{pt}, \boldsymbol{E}^{e'}(\boldsymbol{r}, t) = a'(\boldsymbol{r})e^{p't'} \tag{5.1}$$

haben entsprechend der ersten Interpretation von (3.1) und identifizieren t mit t', p ,mit p'. Dann bleibt von (3.5) nur

$$\boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J}' - \boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J} = \operatorname{div} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}' - \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}) \tag{5.2}$$

und Integration über den ganzen Raum gibt

$$\int (\boldsymbol{E}^e \cdot \boldsymbol{J} - \boldsymbol{E}^e \boldsymbol{J}) dV = 0. \tag{5.3}$$

Dies ist das Maxwell'sche Reziprozitätstheorem. Wir betonen, daß es nicht allein aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt, daß es unter den allgemeinen Voraussetzungen, die wir gemacht haben, eine Folge der Onsager-Casimir'schen Reziprozitätsbeziehungen und damit der Thermodynamik der irrevesiblen Prozesse ist.

Eine zweite Fassung des Reziprozitätstheorems ergibt sich, wenn man für E^e und $E^{e'}$ punktförmige Erregungen annimmt.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{a} \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)e^{pt}, \\ \boldsymbol{E}^{e'}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{a} \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')e^{pt}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dann lassen sich die Integrationen in (5.3) ausführen und man erhält

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{J}'(\boldsymbol{r}_0, t) = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_0', t) \tag{5.5}$$

Für die Erregungen (5.1) kann man (4.4) auch in der Gestalt

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r}, t) = \int Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p; \boldsymbol{B}_0) \boldsymbol{E}^e_{ik}(\boldsymbol{r}_1, t) dV_1 \tag{5.6}$$

anwenden. Insbesondere ergibt sich für die punktförmigen Erregungen (5.4)

$$J_i(\boldsymbol{r}, t) = Y_{ik}(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_0, p\, \boldsymbol{B}_0)\, a_k, \tag{5.7}$$

$$J_i'(\boldsymbol{r}, t) = Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0', p_1, -\boldsymbol{B}_0) a_k. \tag{5.8}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 1

Setzt man dies in (5.5) ein und beachtet, daß die konstanten Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ willkürlich und unabhängig voneinander sind, so erhählt man die dritte Formulierung des Reziprozitätstheorems

$$Y_{ik}(\boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{r}_0, p; \boldsymbol{B}_0) = Y_{ik}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0', p; -\boldsymbol{B}_0). \tag{5.9}$$

Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar auf elektrische Netzwerke spezialisieren. Dazu nehmen wir an, daß eingeprägte Felder nur in schmalen und kurzen Kanälen existieren. Ihre Richtungen seien durch die Vektoren $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \ldots, \boldsymbol{l}_n$ gegeben und die Beträge dieser Vektoren sollen zugleich die Länge der Kanäle andeuten. Die Spannungen zwischen den Enden der Kanäle sind dann

$$\int\limits_{\alpha} \boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l}_\alpha = u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.10}$$

Der Strom im einzelnen Kanal ist

$$\int\limits_{\alpha} \boldsymbol{J}_i (\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{F}_\alpha = i_\alpha, \tag{5.11}$$

wo $d\boldsymbol{F}_\alpha$ das Flächenelement des Querschnitts bedeutet. Damit ergibt sich aus (5.6)

$$i_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \int\limits_{\beta} d\boldsymbol{F}_\alpha Y_{ik}(\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta, p; \boldsymbol{B}_0)\, E_k^e(\boldsymbol{r}_\beta, t)\, dV_\beta \tag{5.12}$$

$\boldsymbol{r}_\alpha$ ist der Radiusvektor zu einem Punkt im Kanal α; entsprechend ist $\boldsymbol{r}_\beta$ definiert. Schließlich bedeutet dV_β das Volumenelement im Kanal β. Schreibt man nun

$$dV_\beta = d\boldsymbol{l}_\beta \cdot d\boldsymbol{F}_\beta \text{ und } \boldsymbol{E}(d\boldsymbol{l}_\beta \cdot d\boldsymbol{F}_\beta) = (\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}_\beta)\, d\boldsymbol{F}_\beta, \tag{5.13}$$

so ergibt sich

$$i_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \int dF_{\alpha i} Y_{ik}(\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta, p; \boldsymbol{B}_0)\, dF_{\beta k} \cdot u_\beta \tag{5.14}$$

unter der Voraussetzung, daß Y_{ik} im Bereich eines Kanals wenig variiert. Somit wird

$$i_\alpha = \sum_{\beta=1}^{M} Y_{\alpha\beta} u_\beta \tag{5.15}$$

mit

$$Y_{\alpha\beta}(p, \boldsymbol{B}_0) = \int dF_{\alpha i} Y_{ik}(\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{r}_\beta, p, \boldsymbol{B}_0)\, dF_{\beta k} \tag{5.16}$$

und Anwendung von (5.9) gibt

$$Y_{\alpha\beta}(p, \boldsymbol{B}_0) = Y_{\beta\alpha}(p, -\boldsymbol{B}_0) \tag{5.17}$$

Damit ist die Symmetrie der Admittanzmatrix von RCL-Netzwerken bewiesen, aber auch gleichzeitig die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft für den Fall gegeben, daß die Netzwerkelemente magnetisierte Materialien (Gyratoren) enthalten.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß in der Admittanzmatrix (5.16) auch die Strahlungsverluste berücksichtigt sind, daß also die Symmetrieeigenschaft (5.17) auch bei Berücksichtigung der Strahlungsverluste bestehen bleibt.

6. *Das Äquivalenztheorem*

Wir knüpfen wieder an die Identität (3.5) an, wollen aber nun ideale Materialien in dem Sinne voraussetzen, daß ε_{ik}, λ_{ik}, ν_{ik}, μ_{ik}, ϱ_{ik} von p (d. h. von der Frequenz) unabhängig sind. Ferner nehmen wir $\boldsymbol{B}_0 = 0$ an, was auf $\lambda_{ik} = \nu_{ik} = 0$ führt.

Wir wollen ferner die Deutung von (3.5) als einer Identität für die Laplace-Transformierten der Felder zugrunde legen. In diesem Sinne haben wir (4.4) als

$$J(\boldsymbol{r}, \mathrm{p}) = \int Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p; 0) E_k^e(\boldsymbol{r}_1, p)\, dV_1, \tag{6.1}$$

zu schreiben. Wir setzen dies in (3.5) ein, integrieren nach $\boldsymbol{r}$ über den ganzen Raum und dividieren durch $p'-p$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int E_i^e(\boldsymbol{r}, p) \frac{Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p') - Y_{ik}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, p)}{p'-p} E_k^e(\boldsymbol{r}_1, p') dV dV_1 \\ &= \int [E_i'(\boldsymbol{r}, p')\varepsilon_{ik} E_k(\boldsymbol{r}, p) - H_i'(\boldsymbol{r}, p')\mu_{ik} H_k(\boldsymbol{r}, p)] dV. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Machen wir weiter die Annahme, daß die eingepräqten Felder nur in kurzen, dünnen Kanälen wirken (siehe den vorherigen Abschnitt), dann erhalten wir

$$u_\alpha(p) \frac{Y_{\alpha\beta}(p') - Y_{\alpha\beta}(p)}{p'-p} u_\beta(p') = \int [E_i'(\boldsymbol{r}, p')\varepsilon_{ik} E_k(\boldsymbol{r}, p) - H_i'(\boldsymbol{r}, p')\mu_k H_{ik}(\boldsymbol{r}, p)] dV.$$

Wir können nun diese Laplace-Transformation mit den Variablen p und p' umkehren. Setzen wir dann $t = t'$ und wählen beide Felder $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}'$ gleich, dann steht rechts die doppelte Differenz der elektrischen und magnetischen Feldenergie, links steht ein Ausdruck, der nur von den angelegten Spannungen und von der Impedanzmatrix abhängt. Daraus schließen wir: Die Differenz der elektrischen und der magnetischen Feldenergien ist für Netzwerke mit derselben Admittanzmatrix in jedem Augenblick dieselbe, wenn beide Netzwerke mit denselben Spannungen $u_\alpha(t)$ gespeist werden[4,5]. Natürlich haben wir stets Einschaltvorgänge vorauszusetzen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. König und J. Meixner, *Mathematische Nachrichten*, **19**, 265 (1958).

[2] J. Meixner, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **17**, 278 (1964).

[3] J. Meixner, *International Journal of Engineering Science*, **1**, 177 (1963).

[4] B. D. H. Tellegen, *Philips Research Reports*, **7**, 259 (1952).

[5] J. Meixner, *Z. Phys.*, **156**, 200 (1959).

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 1