

# ACTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE PLANE SUR UN COURANT RECTILIGNE INDÉFINI DE MÊME FRÉQUENCE

PAR EMILE DURAND

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse\*

(Manuscrit reçu le 11 Juin 1964)

## 1. Potentiels et champs associés à un courant rectiligne sinusoïdal

### A. Potentiel vecteur

Supposons que le courant circule le long de l'axe des  $z$ . (figure 1) et que son intensité soit  $I(t)$ , la même à un instant  $t$  en tous les points de l'axe des  $z$ . Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$

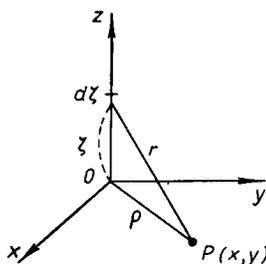


Fig. 1

en un point  $P(x, y)$  est donné par l'intégrale des potentiels retardés (ou avancés)

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I \left( t \pm \frac{r}{c} \right) \frac{d\zeta}{r}, \quad (1)$$

avec

$$r = \sqrt{\varrho^2 + \zeta^2} \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = \overline{OP}. \quad (2)$$

Les autres composantes  $A_x$  et  $A_y$  sont nulles. On suppose de plus que les charges en mouvement qui constituent le courant sont neutralisées par des charges fixes de signe contraire, de telle sorte que le potentiel scalaire  $V$  soit nul.

---

\* Adresse: Institut de Calcul Numérique, Ensemble Scientifique — Route de Narbonne.

En posant  $\zeta = \varrho \operatorname{sh} u$  l'intégrale (1) s'écrit aussi

$$A_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty I \left( t \pm \frac{\varrho}{c} \operatorname{ch} u \right) dn. \quad (3)$$

Si le courant est sinusoïdal et du type

$$I(t) = I_0 \cos(kct), \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4)$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde dans le vide correspondant à la fréquence du courant, l'intégration de (3) conduit à l'expression

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4} \{ Y_0(k\varrho) \cos(kct) \pm J_0(k\varrho) \sin(kct) \}, \quad (5)$$

en désignant par  $J_0$  et  $Y_0$  les fonctions de Bessel d'ordre zéro, de première et de deuxième espèce respectivement. Le signe (+) dans (5) correspond à des ondes convergentes tandis que le signe (-) correspond à des ondes divergentes. Cela apparaît encore plus clairement quand  $k \gg 1$  et que l'on peut remplacer les fonctions  $J_0$  et  $Y_0$  par leurs valeurs asymptotiques, on a alors

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} \cos \left[ kct \pm \left( k\varrho + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (6)$$

Les potentiels retardés et avancés sont séparément des solutions de l'équation des ondes; une combinaison linéaire de ces deux solutions est encore une solution de cette équation. En particulier le potentiel

$$A_z = \frac{1}{2} [\operatorname{Ret.} + \operatorname{Av.}] = -\frac{\mu_0 I_0}{4} Y_0(k\varrho) \cos(kct), \quad (7)$$

correspond à une onde stationnaire qui a même singularité<sup>1</sup> que l'expression (5).

En définitive nous pouvons écrire les 3 potentiels vecteurs associés au courant (4) sous la forme

$$A_z = -\frac{\mu_0 I_0}{4} \{ Y_0(k\varrho) \cos(kct) + \eta J_0(k\varrho) \sin(kct) \}, \quad (8)$$

ou

$$\eta = \begin{cases} +1 & \text{ondes convergentes} \\ -1 & \text{ondes divergentes} \\ 0 & \text{ondes stationnaires.} \end{cases} \quad (9)$$

<sup>1</sup> L'expression  $\frac{1}{2} [\operatorname{Ret.} - \operatorname{Av.}] = \frac{\mu_0 I_0}{4} J_0(k\varrho) \sin(kct)$  ne possède plus de singularité à l'origine et ne peut être associée à notre courant.

### B. Champ électromagnétique

Les vecteurs de champ  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  se déduisent du potentiel-vecteur  $\mathbf{A}$  par les formules habituelles

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (10)$$

qui, en coordonnées cylindriques  $\varrho, \varphi, z$  donnent

$$H = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial \varrho} = -\frac{I_0 k}{4} \{Y_1(k\varrho) \cos(kct) + \eta J_1(k\varrho) \sin(kct)\}, \quad (11)$$

$$E_z = -\partial_t A_z = -\frac{I_0 k c \mu_0}{4} \{Y_0(k\varrho) \sin(kct) - \eta J_0(k\varrho) \cos(kct)\}. \quad (12)$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  est donc tangent à un cercle ayant pour axe le courant. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  n'a qu'une composante  $E_z$  parallèle au courant.

A grande distance du courant ( $k\varrho \gg 0$ ) on a les expressions asymptotiques

$$H_\varphi = \eta \frac{I_0 k}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} \sin \left[ kct \pm \left( k\varrho + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (13)$$

$$E_z = \frac{\mu I_0 k c}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k \varrho}} \sin \left[ kct \pm \left( k\varrho + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (14)$$

### C. Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting  $\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  est radial. Avec (11) (12) on trouve aisément que sa valeur moyenne a pour expression

$$\overline{\mathcal{P}_\varrho} = -\overline{E_z H_\varphi} = -\eta \frac{\mu_0 I_0}{32} k^2 c (J_1 Y_0 - J_0 Y_1), \quad (15)$$

car les carrés des sinus ou des cosinus ont pour valeur moyenne 1/2 tandis que des produits d'un sinus par un cosinus ont des valeurs moyennes nulles.

D'après l'identité

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}. \quad (16)$$

l'expression (15) s'écrit aussi

$$\overline{\mathcal{P}_\varrho} = -n \frac{\mu_0 I_0^2}{16\pi} \frac{kc}{\varrho} = -n \frac{\mu_0 I^2}{16} \frac{\omega}{\varrho}. \quad (17)$$

D'après (9) on voit que  $\mathcal{P}_\varrho$  est positif pour les ondes divergentes (émission d'énergie) négatif pour les ondes convergentes (absorption d'énergie) et nul pour les ondes stationnaires.

L'énergie «mise» par seconde et par unité de longueur du courant est

$$\overline{W} = 2\pi \varrho \overline{\mathcal{P}_\varrho} = -\eta \frac{\mu_0 I_0^2}{8} kc. \quad (18)$$

Pour les ondes convergentes  $\overline{W}$  est négatif ce qui correspond en fait comme nous l'avons déjà dit, à une absorption. On notera que  $\overline{W}$  est proportionnel à  $I_0^2$  ce qui permet de définir une résistance de rayonnement.

#### D. Emploi des grandeurs complexes

L'expression (8) est la partie réelle de

$$A_z = -\frac{\mu_0 I_0}{4} (Y_0 - \eta i J_0) e^{ikct}. \quad (19)$$

Les formules (10) donnent alors les champs complexes sous la forme

$$H_\varphi = -\frac{kI_0}{4} (Y_1 - \eta i J_1) e^{ikct}, \quad (20)$$

$$E_z = \frac{ikc \mu_0 I_0}{4} (Y_0 - \eta i J_0) e^{ikct}, \quad (21)$$

en désignant par  $J_1$  et  $Y_1$  les fonctions de Bessel d'ordre 1, de première et de deuxième espèce. Avec ces grandeurs complexes, on sait que la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit

$$\overline{\mathcal{P}}_e = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] = -\frac{1}{4} [E_z^* H_\varphi + E_z H_\varphi^*] = -\eta \frac{\mu_0 I_0^2 kc}{16\pi \rho}, \quad (22)$$

On retrouve donc (17). Ces formules simplifiant les calculs, dans ce qui suit nous les utiliserons exclusivement.

#### 2. Echanges d'énergie entre une onde plane et le courant

Considérons une onde plane monochromatique ( $\omega = kc$ ) se propageant dans la direction de l'axe des  $x$  et dont le champ électrique  $\mathbf{E}^{(2)}$  serait dirigé suivant l'axe des  $z$ . Le champ magnétique  $\mathbf{H}^{(2)}$  se déduit de  $\mathbf{E}^{(2)}$  par les équations de Maxwell. On peut en définitive prendre

$$E_z^{(2)} = a c \mu_0 \exp [ik(ct - x + x_0)], \quad (23)$$

$$H_z^{(2)} = -a \exp [ik(ct - x + x_0)], \quad (24)$$

la constante  $a$  étant supposée réelle et  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

Considérons le système obtenu en superposant cette onde plane (23), (24) aux champs (20), (21) que nous caractériserons par l'indice 1 soit

$$E_z^{(1)} = ic \mu_0 b (Y_0 - \eta i J_0) e^{ikct}, \quad \text{avec } b = \frac{kI_0}{4} \quad (25)$$

$$H_\varphi^{(1)} = -b (Y_1 - \eta i J_1) e^{ikct}. \quad (26)$$

Ces champs sont disposés comme l'indique la figure 2 (Le courant est au point 0). Si l'on veut calculer l'énergie qui rentre dans le courant il suffit de calculer la composante  $\mathcal{P}_\rho$  du vecteur de Poynting, dans la direction des  $\rho$  croissants. On considère donc les composantes suivantes des champs résultants

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)}, \quad (27)$$

$$H_\varphi = H_\varphi^{(1)} + H_y^{(2)} \cos \varphi. \quad (28)$$

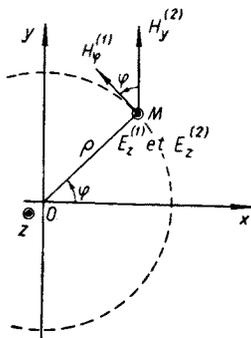


Fig. 2

Le vecteur moyen de Poynting au point  $M$  est donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} &= \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} E_z^* H_\varphi \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} E_z^{(1)*} H_\varphi^{(1)} - \frac{1}{2} E_z^{(2)*} H_y^{(2)} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} E_z^{(1)*} H_y^{(2)} \cos \varphi + E_z^{(2)*} H_\varphi^{(1)} \right\} \\ &= \bar{\mathcal{P}}_\rho^{(11)} + \mathcal{P}_\rho^{(22)} + \mathcal{P}_\rho^{(12)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Le terme  $\mathcal{P}_\rho^{(11)}$  a déjà été calculé (formule (17)) soit

$$\bar{\mathcal{P}}^{(11)} = -\eta \frac{bI_0}{2} \mu_0 c. \quad (30)$$

Pour le terme  $\mathcal{P}_\rho^{(22)}$  on trouve aisément

$$\bar{\mathcal{P}}_\rho^{(22)} = \frac{1}{2} a^2 c \mu_0 \cos \varphi. \quad (31)$$

Le terme  $\bar{\mathcal{P}}_\rho^{(12)}$  est plus compliqué et s'écrit

$$\mathcal{P}_\rho^{(12)} = \text{Re} \left\{ -\frac{i}{2} abc \mu_0 \cos \varphi (Y_0 - i\eta J_0 e^{-ik(x-x_0)} + \frac{1}{2} abc \mu_0 (Y_1 - i\eta J_1 e^{ik(x-x_0)}). \quad (32)$$

En fait nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de l'expliciter. On veut en effet calculer l'énergie «absorbée» par le courant. Il faut donc calculer le flux de  $\mathcal{P}$  a travers une circonférence de rayon  $\varrho$  soit

$$W = - \int_0^{2\pi} \overline{\mathcal{P}}_{\varrho} \varrho d\theta = W_{11} + R_{22} + W_{12}. \quad (33)$$

Comme  $\text{div } \vec{\mathcal{P}} = 0$  en dehors du point 0 on peut prendre une circonférence dont le rayon  $\varrho$  est aussi petit qu'on le veut. Dans ces conditions seul le terme en  $Y_1$  de (32) subsiste et avec la valeur limite

$$Y_1(k\varrho) \neq - \frac{2}{\pi k \varrho} \text{ quand } \varrho \ll 1, \quad (34)$$

et  $x = 0$  dans (32), on trouve aussitôt

$$W_{12} = \frac{2abc\mu_0}{k} \cos(kx_0), \quad (35)$$

et cette valeur (27) est rigoureusement exacte. Pour  $W_{11}$  on a l'expression (18) changée de signe et pour  $W_{22}$  on trouve aisément qu'il est nul, d'où

$$W = \eta \frac{\mu_0 I_0 bc}{2} + \frac{2abc\mu_0}{k} \cos(kx_0), \quad (36)$$

cette expression (36) de  $W$  est l'énergie absorbée (algébriquement) par l'unité de longueur du courant pendant l'unité de temps. Le premier terme de (36) est positif, négatif ou nul suivant que l'on a affaire à un courant absorbeur, émetteur ou stationnaire (en l'absence de l'onde plane). Le deuxième terme a un signe qui dépend essentiellement de la phase de l'onde plane au point où se trouve le courant. Sa valeur est maximum négative pour  $x_0 = \pi$  (émission due à l'interaction) et il est nul enfin si  $x_0 = \pi/2$ .

Le cas le plus simple est celui d'un courant stationnaire ( $\eta = 0$ ). On a

$$W = \frac{2abc\mu_0}{k} \cos(kx_0) \quad (37)$$

Ce cas présente une certaine analogie avec les systèmes quantifiés de la mécanique ondulatoire. On sait que si une onde plane tombe sur un système quantifié il ne peut y avoir d'interaction que si la fréquence correspond à une fréquence de transition. Ici en théorie classique, il faut que la fréquence soit égale à celle du courant, sinon la moyenne dans le temps est nulle.

En théorie quantique il y a soit absorption induite soit émission induite et les probabilités sont égales. En théorie classique il y a soit absorption  $0 < kx_0 < \frac{\pi}{2}$  soit émis-

<sup>1</sup> On pourrait faire le calcul avec  $\varrho$  quelconques en utilisant le développement

$$e^{ikx} = e^{ik\rho \cos \psi} = J_0(k\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k\rho) \cos(n\psi)$$

On arrivait encore au résultat (27)

sion  $\left(\frac{\pi}{2} < kx_0 < \pi\right)$  Si on a un grand nombre de courants répartis avec des phases au hasard en moyenne il n'y a pas d'absorption. C'est comme en théorie quantique, l'absorption ou l'émission moyenne étant liée à la population des deux niveaux quantiques.

Il est intéressant d'exprimer  $W$  en largeur  $l$  de la bande de l'onde plane incidente qui transporterait cette énergie pendant l'unité de temps. D'après (31) on trouve pour  $W'$  qui traverse une bande de largeur unité

$$W' = \bar{P}_x = \frac{1}{2} a^2 c \mu_0 \quad (38)$$

d'où

$$l = \frac{W}{W'} = \frac{4}{k} \cdot \frac{b}{a} \cos(kx_0) \quad (39)$$

Notons que  $l$  augmente en même temps que  $I_0$  car  $b = kI_0/4$ . Cette grandeur correspond aux sections de choc des théories quantiques. Nous allons maintenant étudier ce phénomène d'interaction en détail et voir quels sont les chemins suivis par l'énergie (lignes tangentes au vecteur de Poynting) dans les différents cas.

### 3. Les lignes de propagation de l'énergie

#### A. Equation des courbes normales au vecteur de Poynting

Si l'on a un système invariant par translation dans la direction de l'axe  $oz$  (donc indépendant de  $z$ ) et ne possédant pas de composantes du champ magnétique dans la direction  $oz$ ; Si  $E_x = E_y = 0$  les équations de Maxwell donnent  $H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  soit

$$\begin{cases} ikc\mu H_x = -\partial_y E_z & H_z = 0. \\ ikc\mu H_y = \partial_x E_z \end{cases} \quad (40)$$

Dans ces conditions les composantes moyennes du vecteur de Poynting s'écrivent

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_z H_y^*) = -\frac{i}{2kc\mu} \operatorname{Re}\{E_z \partial_x E_z^*\}, \\ \bar{P}_y &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_z H_x^*) = -\frac{i}{2kc\mu} \operatorname{Re}\{E_z \partial_y E_z^*\}, \\ \bar{P}_z &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Si on écrit  $E_z$  sous la forme  $(M+iN)$  soit

$$E_z = E \cdot e^{i\psi} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{M}{N} \quad E = \sqrt{M^2 + N^2}. \quad (42)$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_x E_z &= [\partial_x E + iE \partial_x \psi] e^{i\psi}, \\ \partial_y E_z &= [\partial_y E + iE \partial_y \psi] e^{i\psi}. \end{aligned} \quad (43)$$

En portant (43) dans (41) il vient

$$\bar{\mathcal{P}}_x = -\frac{E^2}{2kc\mu} \partial_x \psi, \quad \bar{\mathcal{P}}_y = -\frac{E^2}{2kc\mu} \partial_y \psi. \quad (44)$$

Par conséquent le vecteur de Poynting est normal aux courbes  $\psi = cte$  ou aussi bien aux courbes

$$\frac{N(x,y)}{M(x,y)} = cte. \quad (45)$$

Ces résultats peuvent s'appliquer au champ  $E_z$  résultant de l'onde plane et du courant. On a d'après (23) (25) (27)

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)} = \eta c \mu_0 b J_0(k\rho) + ac \mu_0 \cos [k(x-x_0)] \\ + i \{c \mu_0 b Y_0(k\rho) - ac \mu_0 \sin [k(x-x_0)]\}. \quad (46)$$

Le vecteur de Poynting est donc normal aux courbes

$$\frac{Y_0(k\rho) - A \sin [k(x-x_0)]}{\eta J_0(k\rho) + A \cos [k(x-x_0)]} = cte \quad \text{avec } A = \frac{b}{a} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (47)$$

### B. Recherche des points de branchement et des points doubles

Quand on examine les figures suivantes qui donnent les trajectoires de l'énergie on constate qu'il y a des zones tourbillonnaires et des points où deux lignes de courant se coupent. Ces points correspondent respectivement pour la fonction  $M/N$  à des points de branchement et à des points doubles. Les premiers sont donnés par

$$M = 0, \quad N = 0, \quad (48)$$

et les points doubles<sup>2</sup> par

$$M \partial_x N - N \partial_x M = 0, \quad M \partial_y N - N \partial_y M = 0. \quad (49)$$

Avec l'expression (47), les formules (48) donnent

$$\sin (X - X_0) = \frac{Y_0(R)}{A} \quad \cos (X - X_0) = -\eta \frac{J_0(R)}{A}, \quad (50)$$

en posant

$$X = kx; \quad X_0 = kx_0; \quad R = k\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (51)$$

pour les points de branchement.

De (50) on tire

$$Y_0^2 + \eta^2 J_0^2 = A^2; \quad (52)$$

cette dernière équation donne  $R$  et l'une des équations (50) donne  $X$ .

<sup>2</sup> Il y a toujours évidemment la solution  $M = N = 0$ .

Pour les points doubles on est conduit aux expressions

$$\frac{Y}{R} \left\{ -\frac{2\eta}{\pi R} + A [Y_1(R) \cos (X-X_0) + \eta J_1(R) \sin (X-X_0)] \right\} = 0 \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\eta X}{\pi R^2} - \eta A \left[ J_0(R) \cos (X-X_0) + \frac{X}{R} J_1(R) \sin (X-X_0) \right] + \\ & + A \left[ Y_0(R) \sin (X-X_0) - \frac{X}{R} Y_1(R) \cos (X-X_0) \right] - A^2 = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Ces formules se simplifient notamment dans le cas d'un courant stationnaire ( $\eta = 0$ ). On a alors pour les points de branchement

$$|Y - Y_0| = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad Y_0(R) = \pm A, \quad (55)$$

et pour les points doubles

$$Y = 0 \text{ (point sur l'axe), ou } Y_1(R) = 0 \quad (56)$$

$$Y_0(R) \sin (X-X_0) - \frac{X}{R} Y_1(R) \cos (X-X_0) = A \quad (57)$$

Si on prend  $Y_1(R) = 0$  dans (56), l'expression (57) se réduit à

$$\begin{cases} Y_1(R) = 0 \\ \sin (X-X_0) = \frac{A}{Y_0(R)} \end{cases} \quad (58)$$

La première de ces formules (58) donne  $R$  et la deuxième donne  $X$ . Si on prend  $Y = 0$  dans (56) on a  $X = \pm R$  et (57) se réduit à

$$Y_0(|X|) \sin (X-X_0) - (\pm) Y_1(|X|) \cos (X-X_0) = A \quad (59)$$

avec (+) si  $X > 0$  et (-) si  $X < 0$ .

C. Onde plane et courant stationnaire. La forme des lignes de courant d'énergie dépend essentiellement de  $A$  et de  $X_0$ . Par exemple d'après la 2<sup>e</sup> équation (55) les zones tourbillonnaires sont liées à l'existence des points d'intersection de la courbe  $Y_0(R)$  avec les droites  $\pm A$  parallèles aux abscisses. Or d'après la figure 3 on voit que plus  $A$  est petit et plus le nombre de ces points d'intersection est grand; tant que  $A > 0,521$  il ne peut y avoir au maximum qu'un point d'intersection correspondant à la branche négative de la fonction  $Y_0$ . Plaçons nous dans ce cas avec  $A = 1$  et voyons comment se modifient les trajectoires quand on fait varier  $X_0$  de 0 à  $\pi$ .

Quand  $X_0 = 0$  on a les courbes de la figure 4. Les courbes en pointillés sont les courbes  $M/N = cte$ . On note la présence d'un point double sur l'axe situé à une distance  $kx = X = 0,53$  de l'origine  $O$  où se trouve le courant. Les deux lignes de courant qui passent par ce point deviennent parallèles à l'axe pour  $x \rightarrow -\infty$  et sont alors distantes de  $l$  donné par (39), soit  $kl = 4$ . Pour déterminer ce point double on a l'équation (59) qui donne

$$f(R) = Y_0(R) \sin R + Y_1(R) \cos R = 1. \quad (60)$$

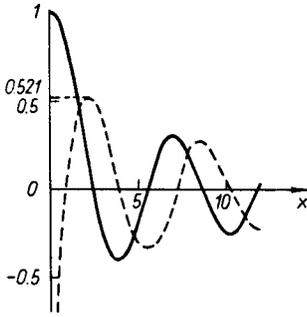


Fig. 3

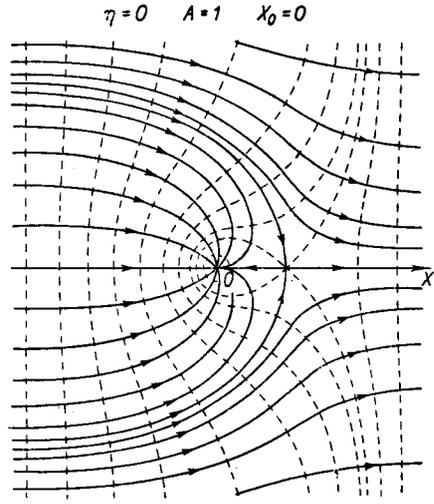


Fig. 4

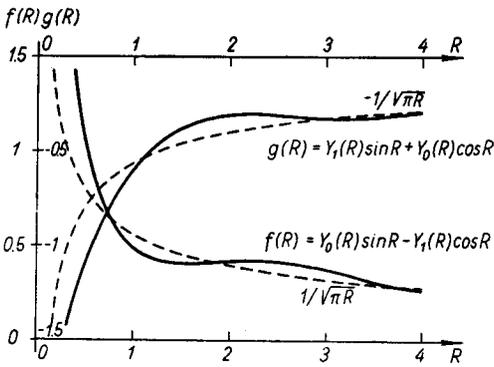


Fig. 5

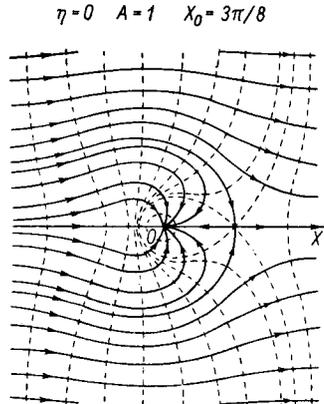


Fig. 6

On a tracé la courbe  $f(R)$  sur la figure 5; quand  $R \gg 1$  on a  $f(R) \approx 1/\sqrt{\pi R}$ ; pour avoir  $R$  il suffit de prendre son intersection avec la parallèle à l'axe des  $R$ , à une distance égale à 1 de de dernier.

La figure 6 correspond à  $X_0 = 3\pi/8 = 1,178$ . Le point double sur l'axe est à une distance  $kx = X = 0,75$  su point 0. Les lignes de courant qui aboutissent en ce point correspondent (pour  $x \rightarrow -\infty$ ) à une section efficace de l'onde absorbée plus petite que dans la figure 4, conformément à la formule (39).

La figure 7 correspond à  $X_0 = 11\pi/24 = 1,447$ . On voit qu'il y a deux points de branchement pour les courbes en pointillés c'est-à-dire deux zones tourbillonnaires pour le vecteur de Poynting ces points sont à une distance  $R = 0,226$  de l'origine et  $X = -0,13$ . Les points

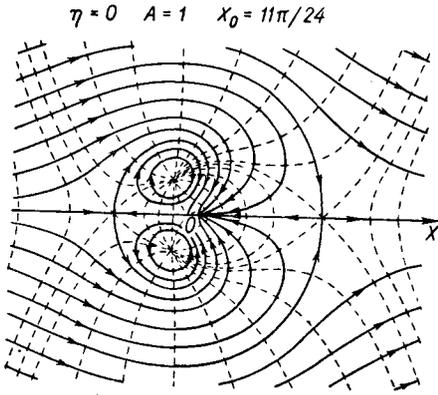


Fig. 7

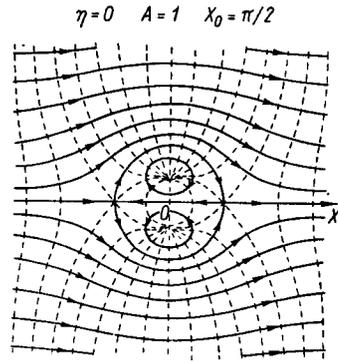


Fig. 8

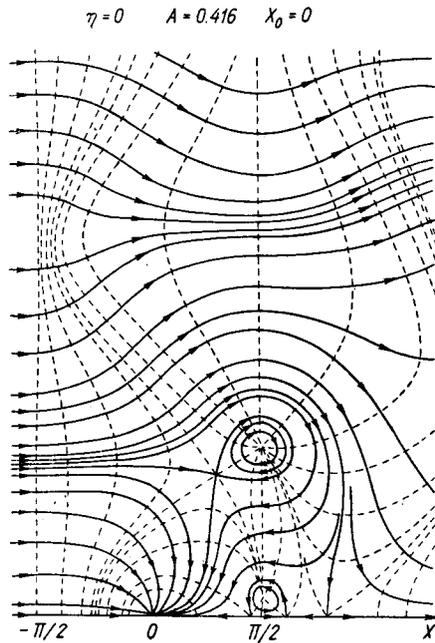


Fig. 9

doubles sur l'axe sont à  $X = 1,05$  et  $X = -0,44$  et  $-0,05$ . Il est facile de calculer exactement pour quelle valeur de  $X_0$  la zone tourbillonnaire commence à apparaître, réduite à un point sur l'axe. D'après (55), c'est quand  $Y = 0$  donc  $R = X = 0,226$ . On a alors  $\eta = 0$ ,  $|X_0 - \pi/2| = 0,226$  d'où  $X_0 = 1,345$ . Quand  $X_0$  continue à croître à partir de cette valeur le point de branchement tourne sur une circonférence de rayon  $R = 0,226$  et quand  $X_0 = \pi/2$  il se trouve à l'abscisse  $X = 0$ . La figure 8 correspond à ce cas. On notera que dans ce cas, conformément à (39) la section efficace est nulle. Les points doubles de cette

figure sont aux abscisses  $X = 0,56$ . Ils sont donnés par (59) qui prend la forme

$$g(R) = Y_1(R) \sin R + Y_0(R) \cos R = -1 \quad (61)$$

cette courbe est représentée sur la figure 5. Quand  $R \gg 1$  on a  $f(R) \neq -1/\sqrt{\pi R}$ .

Si on continue à faire varier  $X_0$  au delà de  $\pi/2$  jusqu'à  $\pi$ , on retrouve des lignes de courants analogues aux précédents mais avec des flèches inversées et des figures ayant tourné de  $180^\circ$  dans leur plan. D'après (37) on n'a plus une absorption induite mais une émission induite.

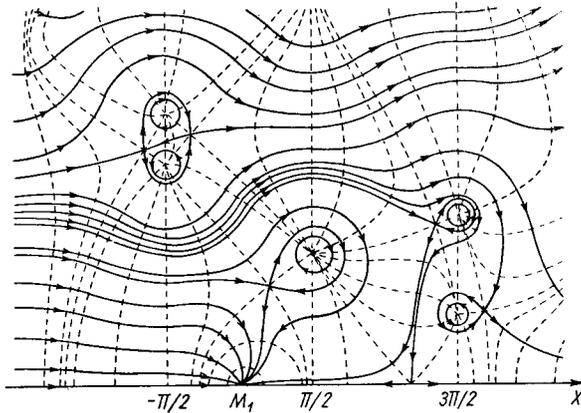


Fig. 10

Revenons maintenant au cas  $X_0 = 0$  et diminuons progressivement la valeur de  $A$ . Quand  $A = 0,521$  on voit apparaître un point de branchement qui se détermine par  $R = 2,3$  et  $X = \pi/2 = 1,57$ . Quand  $A$  décroît, ces deux points de branchement s'écartent l'un vers le haut et l'autre vers le bas en restant toujours à l'abscisse  $X = \pi/2$ . La figure 9 correspond au cas  $A = 0,416 \dots$  on a choisi cette valeur car la zone tourbillonnaire voisine de l'axe possède deux points doubles sur l'axe avec un écartement maximum. Le point double hors de l'axe est donné par (58) soit  $R = 2,19$  et  $X = 0,92$ . Les points de branchement sont donnés par  $Y_0(R) = 0,416$  soit  $R = 1,59$  et  $R = 2,87$  et  $X = \pi/2$ . Vers le haut de la figure 9 pour  $X = -\pi/2$  on voit les lignes en poinçillées qui se resserrent ce qui montre que l'on est près de l'apparition d'un nouveau point de branchement dans cette région.

La figure 10 correspond à  $A = 0,3$ , valeur encore plus petite que la précédente. On peut constater que le nombre de points de branchement a augmenté et que la forme des trajectoires de l'énergie est encore plus complexe que dans la figure 9.

#### D. Onde plane et courant émetteur ou absorbant

Si  $\eta = \pm 1$  l'énergie absorbée est donnée par (36). On voit que le premier terme peut soit renforcer soit diminuer la valeur de  $W$ . Cela dépend des signes de  $\eta$  et de  $\cos X_0$ .

Sur la figure (11) on a un courant émetteur qui compense exactement l'énergie absorbée par interaction ( $\eta = -1$ ,  $X_0 = 0$ ). La section efficace d'absorption est nulle comme dans

la figure 8, mais les deux zones tourbillonnaires sont en avant du courant au lieu d'être de chaque côté de lui.

Sur la figure (12) on a les mêmes valeurs des paramètres que dans la figure (11) mais es signes sont tels que les deux termes de (36) s'ajoutent ( $\eta = 1, X_0 = 0$ ) au lieu de se

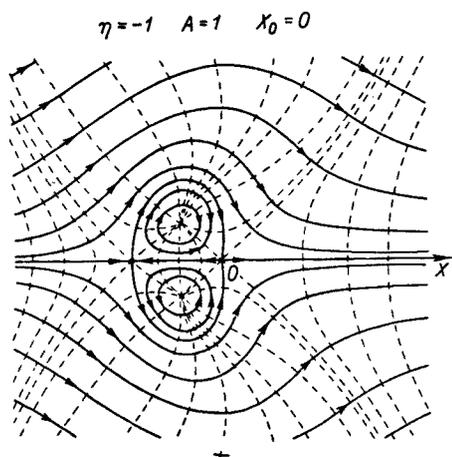


Fig. 11

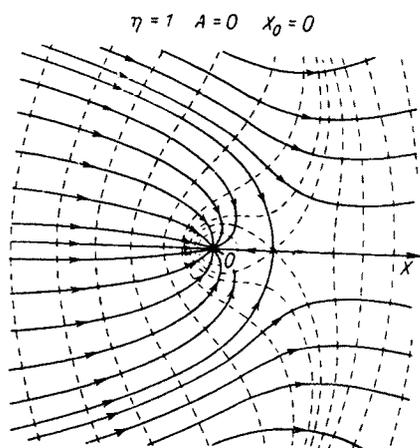


Fig. 12

retrancher comme précédemment. La figure 12 montre l'allure des trajectoires de l'énergie dans ce cas; elles sont tout à fait analogues à celles de la figure 4.

Toutes les figures qui illustrent cet article ne sont pas tracées approximativement; elles ont été dessinées d'une manière très précise à partir des tableaux de nombres obtenus avec les calculateurs électroniques de l'Université de Toulouse.