DIFFERENTIALE DER SPHÄRISCHEN ABERRATION DRITTER ORDNUNG NACH KONSTRUKTIONSELEMENTEN IN EINEM BELIEBIGEN OPTISCHEN SYSTEM

VON JANINA BARTKOWSKA

Polnische Optische Werke, Warschau*

(Eingegangen am 20. Oktober, 1964)

Die sphärische Längsaberration dritter Ordnung betrachtet man als Funktion von Konstruktionselementen, Linsendicken, Luftabständen und Flächenkrümmungen. Es werden Formeln entwickelt, welche Differentiale der sphärischen Aberration darstellen, wobei nur Glieder dritter Ordnung berücksichtigt werden. Es wird der Fall der konstanten Gegenstandlage, der konstanten Vergrösserung und des konstanten Gegenstandbildabstandes betrachtet.

Einleitung

Die Istdaten optischer Systeme stimmen nie infolge unvermeidlicher Fertigungsfehler mit den theoretisch berechneten Werten überein. Über den Einfluss dieser Abweichungen auf die Bildverschlechterung hat Picht [1] hingewiesen. Differentialmethoden zur Berechnung des Strahlenganges verwendet Fialovszky [5]. In dieser Arbeit will ich diesen Gedankengang weiter entwickeln, wobei ich mich nur auf sphärische Aberration dritter Ordnung beschänke.

Differentiale nach Linsendicken und Luftabständen

Die Änderungen von Koordinaten eines merydionalen Aperturstrahles beschreiben folgende Formeln (5)

$$\delta s'_k = K_k \delta s_k + L_k \delta u_k \tag{1}$$

$$\delta u_{k+1} = M_k \delta s_k + N_k \delta u_k \tag{2}$$

$$K_k = \frac{n_k \sin^2 u_k}{n_{k+1} \sin^2 u_{k+1} \cos i_k \cos i'_k} - \frac{n_k \sin u_k \operatorname{tg} i_k \operatorname{tg} i'_k}{n_{k+1} \sin u_{k+1}}$$

$$L_k = \frac{r_k \operatorname{tg} i_k \operatorname{tg} i'_k \sin (u_k - i_k)}{\sin^2 u_{k+1} \sin u_k} \left(\sin u_k - \frac{n_k \sin u_{k+1}}{n_{k+1}} \right)$$

* Adresse: Polskie Zakłady Optyczne, Warszawa, ul. Grochowska 320, Polska.

$$M_k = \frac{\sin u_k}{r_k}\left(\frac{1}{\cos i_k} - \frac{n_k}{n_{k+1}\cos i'_k}\right)$$

$$N_k = \frac{\sin u_{k+1}}{\sin u_k \cos i'_k \cos i_k} - \operatorname{tg} i_k \operatorname{tg} i'_k$$

u bedeutet Winkel zwischen Strahl und Achse,
i und i' sind Einfalls und Brechungswinkel.
Diese vier Koeffizienten kann man in Reihen entwickeln. Mit Vernachlässigung Glieder höheren Ordnung erhält man

$$K_k = \frac{n_k\alpha_k^2}{n_{k+1}\alpha^2_{+1}}\left\{1+\frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2}\left[\frac{\beta_{k+1}}{J\alpha_{k+1}}\sum_1^k I+\frac{\beta_k}{J\alpha_k}\left(\sum_1^{k-1} I - I_k\right)-\frac{2}{J}\,II_k-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\alpha_{k+1}^2}{2}+\frac{\alpha_k^2}{2}\right]\right\} \tag{3}$$

$$L_k = -\frac{I_k \sin u_1}{\alpha_1\alpha_k n_{k+1}\alpha^2{}_{+1}} \tag{4}$$

$$M_k = \frac{\sin u_1 n_k \alpha_k^2 \alpha_{k+1}}{\alpha_1 J}\left(\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) = \frac{\alpha_k \bar{\Delta}_k n \sin u_1}{\alpha_1 n_{k+1} r_k} \tag{5}$$

$$N_k = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \tag{6}$$

$$J = n\alpha\beta(z-s)$$

α, h sind Winkel und Höhen des paraksialen Aperturstrahles, $s = h/\alpha$, β, y sind Winkel und Höhen eines beliebigen Hilfsstrahles, $z = y/\beta$ der die Rolle des Blendenstrahles für II Flächenkoeffizienten spielt. Die Flächenteilkoeffizienten werden mit folgenden Formeln bestimmt

$$I = \frac{h\bar{\Delta}_\alpha^2}{\bar{\Delta}^2\frac{1}{n}}\,\bar{\Delta}\frac{\alpha}{n} = h^4 Q_s^2 \bar{\Delta}\,\frac{1}{ns}$$

$$II = I\,\frac{\bar{\Delta}\beta}{\bar{\Delta}\alpha} = h^3 y Q_z Q_s \bar{\Delta}\,\frac{1}{ns}$$

Q_s bedeutet den Abbeschen Invarianten für Aperturstrahl
Q_z für Blendenstrahl
Obwohl die Werte der Flächenteilkoeffzienten II von der Blendenlage abhängig sind, hat die Wahl des Blendenstrahles keinen Einfluss auf K und M Werte. Die Näherungsaudsrücke (3) bis (6) sind jetzt in die Formel (1) und (2) einzusetzen wobei $\delta s_k = -\delta d_k$, $\delta u_k = 0$.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 5

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 5

Wiederholt man Formeln (1) und (2) für alle Flächen mit $\delta s_{k+1} = \delta s'_k$ so folgt es mit Vernächlässingung von Glieder höheren Ordnung für die Bildweite

$$\frac{\partial s'_p}{\partial d_k} = \frac{\partial s'_0}{\partial d_k}\left(1+\frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2} D_k\right) \tag{7}$$

wobei

$$D_k = \frac{\beta'_p}{J\alpha' p}\sum_1^p I + \frac{\beta_k}{J\alpha_k}\left(\sum_k^p I - \sum_1^{k-1} I\right) - \frac{2}{J}\sum_k^p II + \frac{\alpha_k^2}{2} - \frac{\alpha_p'^2}{2} \tag{8}$$

$\dfrac{\partial s'_0}{\partial d_k} = -\dfrac{n_4\alpha_k^2}{n'_p\alpha_p'^2}$ bedeutet bekanntes Differential der paraksialen Schnittweite. Daraus Folgt unmittelbar die Formel für Differential der lateralen Vergrösserung

$$\frac{\partial G}{\partial d_k} = \frac{G n_k \alpha_k^2}{J}\left(\frac{\beta'_p}{\alpha'_p} - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\right). \tag{9}$$

Der Abstand Gegenstand — erste Fläche wird mit $s_1 = -d_1$ bezeichnet. Die Formeln (7) bis (9) bleiben richtig auch für Differentiale der Gegenstandlage

$$D_1 = \frac{\beta'_p}{J\alpha'_p}\sum_1^p I + \frac{\beta_1}{J\alpha_1}\sum_1^p I - \frac{2}{J}\sum_1^p S_{II} + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_p'^2}{2}$$

$$\frac{\partial s'_0}{\partial s_1} = \frac{n_1\alpha_1^2}{n'_p\alpha_p'^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial s_1} = -\frac{G n_1 \alpha_1^2}{J}\left(\frac{\beta'_p}{\alpha'_p} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) = -\frac{G^2 n_1}{f_1}$$

Differentiale der sphärischen Aberration beschreiben folgende Formel

$$\frac{\partial \Delta s'}{\partial d} = \frac{\partial s'_0}{\partial d_k}\cdot\frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2} D_k$$

$$\frac{\partial \Delta s'}{\partial s_1} = \frac{\partial s'_0}{\partial s_1}\cdot\frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2} D_1.$$

Differentialle nach Flächenkrümmungen

Anstatt (1) und (2) bekommt man durch differenzieren der bekannten Strahlengangformeln

$$\delta s'_k = \frac{K_k s_k}{\varrho_k}\,\delta\varrho_k - \frac{s_k\delta\varrho_k}{\varrho_k}$$

$$\delta u'_k = \frac{s_k\delta\varrho_k}{\varrho_k} M_k.$$

Es ist bequemer K_k etwas anders auszudrücken

$$K_k = \frac{n_k\alpha_k^2}{n_{k+1}\alpha_{k+1}^2}\left\{1+\frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2}\left[\frac{\bar{\Delta}_k n\varrho_k}{n_k\alpha_k n_{k+1}\alpha_{k+1}}\sum_1^k I + \frac{2W_k h_k\varrho_k}{\alpha_k} - \frac{W_k}{2} - \frac{h\bar{\Delta}_k\alpha\varrho_k}{2}\right]\right\}$$

W bedeutet

$$W = \frac{\overline{\Delta}\alpha}{\overline{\Delta}\dfrac{1}{n}}\,\overline{\Delta}\,\frac{\alpha}{n} = -h^2 Q_s \overline{\Delta}\,\frac{1}{ns}$$

Verwendet man für alle folgende Flächen Ausdrücke von (3) bis (6) in Formeln (1) und (2) so bekommt man nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial s'_p}{\partial \varrho_k} = \frac{\partial s'_0}{\partial \varrho_k}\left[1 + \frac{\sin^2 u_1}{\alpha_1^2}\,R_k\right]$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial \varrho_k} = -\,\frac{h_k^2 \overline{\Delta}_k n}{n'_p \alpha'^2_p}$$

$$R_k = \frac{\beta'_p}{J\alpha'_p}\sum_1^p I + \frac{y_k}{h_k J}\left(\sum_{k+1}^p I - \sum_1^k I\right) - \frac{2}{J}\sum_{k+1}^p II + \frac{\alpha_{k+1}^2}{2} - \frac{\alpha'^2_p}{2} +$$

$$+ \frac{\alpha_k h_k Q_{s,k}}{2n_{k+1}} - \frac{3}{2}\,\frac{W_k n_k}{\overline{\Delta}_k n_k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho_k} = \frac{G h_k^2 \Delta_k n}{J}\left(\frac{\beta'_p}{\alpha'_p} - \frac{y_k}{h_k}\right).$$

Auch diese Differentialle sind von der Wahl des Blendenstrahles unabhängig.

Differentiale bei konstanter Vergrösserung

Es gibt optische Systeme, in welchen die Vergrösserung immer konstant bleiben soll. Die kompensierende Justrierbewegung ist aus folgender Gleichung abzulesen

$$\frac{\partial G}{\partial s_1}\,\delta s_1 + \frac{\partial G}{\partial x}\,\delta x = 0$$

x bedeutet beliebiges Konstruktionselement.

Der Einfluss auf sphärische Aberration setzt sich aus der unmittelbaren Wirkung der Änderung des Konstruktionselementen und der kompensierenden Bewegung δs_1 additiv zusammen $\dfrac{\partial G}{\partial s_1} \neq 0$ wenn die Brennweite endlich ist

$$\frac{d\Delta s'}{dx} = \frac{\partial \Delta s'}{\partial x} - \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \Delta s'_1}{\partial s_1}}{\dfrac{\partial G}{\partial s_1}}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 5

$G = \text{const.}$

So bekommt amn für die Ableitung nach Linsendicke oder Luftabstand

$$\frac{d\Delta s'}{dd_k} = \frac{\partial \Delta s'}{\partial d_k} + \frac{n\alpha_k^2\left(\dfrac{\beta_p'}{\alpha_p'} - \dfrac{\beta_k}{\alpha_k}\right)}{n_1\alpha_1^2\left(\dfrac{\beta_p'}{\alpha_p'} - \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\partial \Delta s'}{\partial s_1}$$

und nach Krümmung

$$\frac{d\Delta' s'}{d\varrho_k} = \frac{\partial \Delta s'}{\partial \varrho_k} + \frac{h_k^2\overline{\Delta}_k n\left(\dfrac{\beta_p'}{\alpha_p'} - \dfrac{y_k}{h_k}\right)}{n_1\alpha_1^2\left(\dfrac{\beta_p'}{\alpha_p'} - \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\partial \Delta s'}{\partial s_1}$$

$G = \text{const.}$

Differentiale bei konstantem Gegenstand-Bild Abstande

Die meisten Mikroskopobiektive arbeiten bei konstantem Gegenstand-Bild Abstande. Differentiale der spärischen Aberration mit Berücksichtigung der kompensirenden Bewegung δs_1 lauten fur $n_1\alpha_1^2 \neq n_p'\alpha_p'^2$

$$\frac{d\Delta s'}{dd_k} = \frac{\partial \Delta s'}{\partial d_k} + \frac{\partial \Delta s'}{\partial s_1} \frac{(n_k\alpha_k^2 - n_p'^2\alpha_p'^2)}{(n_1\alpha_1^2 - n_p'\alpha_p'^2)}$$

$$\frac{d\Delta s'}{d\varrho_k} = \frac{\partial \Delta s'}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial \Delta s'}{\partial s_1} \frac{h_k^2\overline{\Delta}_k n}{(n_1\alpha_1^2 - n_p'\alpha_p'^2)}.$$

Beide Differentiale bleiben endlich nur dann, wenn die Vergrösserung von ± 1 verschieden ist (Gegenstand und Bild in Luft).

Schlussbemerkungen

Obige Formel finden vielfache Anwendung beim Korrigieren und bei Schätzung von Fertigungstoleranzen. Differentiale der sphärischen Aberration kann man für verschiedene Wellenlängen berechnen um die chromatische Differenz der spärischen Aberration zu verbessern. Zur Schätzung ven Fertigungstoleranzen Mikroskopobiektiven kleiner Aperturen, Fernrohobiektiven sind die Ableitungen ganz genügend, weil die sphärische Aberration am „empfindlichsten„ ist.

Diese Theorie ist nicht ausreuchend für photographische Obiektive, z.B. im triplet oder tessar übt Dicke der negativen Linse sehr kleinen Einfluss auf sphärische Aberration. Trotzdem ist diese Diske eng zu tolerieren, weil sie Astigmatism und Bildkrümmung stark beeinflusst.

LITERATUHINWEISE

[1] Picht J., *Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule*, (Potsdam), **1**, 13 (1954).
[2] Dlutzik, H., *Optik*, **19**, 613 (1962).
[3] Bartkowska, J., *Acta Phys. Polon.*, **21**, 111 (1962).
[4] Bartkowska, J., *Acta Phys. Polon.*, **32**, 751 (1963).
[5] Fialovszky, J., *J. Opt. Soc. Amer.*, **53**, 807 (1963).

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXVII (1965) Fasc. 5