ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

B. Milianczuk.

Über den Einfluss des magnetischen Feldes auf den Comptoneffekt.

Wpływ pola magnetycznego na zjawisko Comptona.

Streszczenie.

Wychodząc z równania Diraca dla elektronu, znajdującego się w polu magnetycznem oraz pod działaniem fali elektromagnetycznej o dużej częstości, zbadano możliwość ewentualnego wpływu pola magnetycznego na częstość i natężenie prążka Comptona. Okazuje się, że pole magnetyczne nie wywołuje żadnej zmiany długości fali ani też natężenia prążka, które są te same, co i dla elektronu swobodnego. Pochodzi to stąd, że elektron w polu magnetycznem porusza się w kierunku pola tak, jak gdyby był swobodny, a prawdopodobieństwo możliwej w tych warunkach absorpcji i reemisji jest, praktycznie biorąc, równe 0.

Instytut Fizyki Teoretycznej U. J. K. Lwów.

Rękopis otrzymany dnia 30 czerwca 1934.

Die Untersuchung über den Einfluss des magnetischen Feldes auf den Comptoneffekt wurde von Bothe[1]) mit negativem Erfolg unternommen. Er hat nämlich gezeigt, dass ein Feld von 20000 Gauss nicht imstande ist weder die Intensität noch die Wellenlänge merklich zu ändern. Die Intensität der Streustrahlung und ihre Wellenlänge wurde von

[1]) W. Bothe, ZS. f. Phys. *41*, 872, 1927.

ihm senkrecht zum Primärstrahl und zum magnetischen Felde gemessen. Der Zweck der vorliegenden Ausführungen ist die theoretische Untersuchung, inwieweit die Wellenlänge und die Intensität der Comptonschen Streustrahlung durch das magnetische Feld beeinflusst wird. Dabei nehmen wir an, dass es sich um ein freies Elektron handelt.

I. Das Atom befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$, dessen Richtung mit der z-Achse des orthogonalen Koordinatensystems zusammenfällt. Dasselbe sei gleichzeitig der Wirkung einer linear polarisierten Lichtwelle unterworfen. Die Richtung des Lichtstrahles sei durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ und die Richtung des elektrischen Vektors durch $\mathfrak{m}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ gegeben. Das Vektorpotential wird dann durch:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{H}\mathfrak{r}] + \mathfrak{a} \cos \omega \left(t - \frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})}{c}\right)$$

bestimmt, wobei $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, $\omega = 2\pi\nu$, ν die Frequenz des einfallenden Lichtes bezeichnet. Die Diracsche Gleichung schreiben wir in der Form:

$$\left\{ \alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c} y\right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c} x\right) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{ic}\alpha_4 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar c} E_0 \right\} u =$$
$$= -\frac{i\varepsilon a}{\hbar c} (\bar{\alpha}\alpha_1 + \bar{\beta}\alpha_2 + \bar{\gamma}\alpha_3)\, u \cos \omega \left[t - \frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{r})}{c}\right]. \qquad (1)$$

Dabei bezeichnet $\hbar$ die durch 2π dividierte Plancksche Konstante, $E_0 = \mu c^2$ die Ruhenergie, μ und ε die Masse und die Ladung des Elektrons, $a = |\mathfrak{a}|$. α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind die Diracschen Matrixoperatoren.

Um angenäherte Lösungen der Gl. (1) zu finden, wollen wir die Störungsrechnung anwenden.

II. Als ungestörte Gleichung nehmen wir die Diracsche Gleichung des Elektrons im magnetischen Felde:

$$\left\{ \alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\varepsilon H}{2\hbar c} y\right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i\varepsilon H}{2\hbar c} x\right) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \hbar} + \frac{1}{ic}\alpha_4 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar c} E_0 \right\} \psi = 0. \qquad (2)$$

Die Lösung dieser Gleichung wurde von Rabi[1]) und Huff[2]) gegeben. Wir führen (nach Rabi) zylindrisches Koordinatensystem r, φ, z $(x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi)$ ein. Dabei werden die Operatoren α_i in der von Sommerfeld[3]) gegebenen Form benutzt. Man erhält dann die Lö-

[1]) I. I. Rabi, ZS. f. Phys. *49*, 507, 1928.
[2]) L. D. Huff, Phys. Rev. *38*, 501, 1931.
[3]) A. Sommerfeld, Wellenmechan. Ergänzungsband, S. 320 ff.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

sungen der Gleichung (2) (bis auf den gemeinsamen Zeitfaktor $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$) für $m > 0$:

$$\psi_3 = k\psi_1 = k\frac{(-1)^{m-1}}{N}\cdot\frac{(m-1)!\,(j-m)!}{[(j-1)!]^2}\cdot e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2} r^{m-1} L_{j-1}^{m-1}\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{i(m-1)\varphi + i\frac{p}{\hbar}z},$$

$$\psi_2 = \frac{(-1)^m}{N}\cdot\left(\frac{1}{2\hbar}\right)\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E+E_0}{c} - p\right)\frac{(m-1)!\,(j-m)!}{(j!)^2}\cdot e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2} r^m L_j^m\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{im\varphi + i\frac{p}{\hbar}z}, \quad (3)$$

$$\psi_4 = \frac{(-1)^m}{N}\cdot\left(\frac{1}{2\hbar}\right)\left(\frac{E-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right)\frac{(m-1)!\,(j-m)!}{(j!)^2}\cdot e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2} r^m L_j^m\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{im\varphi + i\frac{p}{\hbar}z},$$

und für $m < 0$:

$$\psi_3 = k\psi_1 = k\frac{(-1)^{-m+1}}{N}\cdot\frac{(-m+1)!\,(j-1)!}{[(j-m)!]^2}\cdot e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2}\cdot r^{-m+1} L_{j-m}^{-m+1}\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{i(m-1)\varphi + i\frac{p}{\hbar}z},$$

$$\psi_2 = \frac{(-1)^{-m}}{N}\cdot\frac{1}{2w}\cdot\frac{(-m+1)!\,(j-1)!}{[(j-m)!]^2}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E+E_0}{c} - p\right)\cdot e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2} r^{-m} L_{j-m}^{-m}\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{im\varphi + i\frac{p}{\hbar}z}, \quad (4)$$

$$\psi_4 = \frac{(-1)^{-m}}{N}\cdot\frac{1}{2w}\cdot\frac{(-m+1)!\,(j-1)!}{[(j-m)!]^2}\cdot\left(\frac{E-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right) e^{-\frac{w}{2\hbar}r^2} r^{-m} L_{j-m}^{-m}\left(\frac{w}{\hbar}r^2\right) e^{im\varphi + i\frac{p}{\hbar}z}.$$

$\frac{1}{N}$ bezeichnet den Normierungsfaktor und p entspricht der Impulskomponente in der z-Richtung. Die Energieniveaus E sind durch

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{c^2} + p^2 + 4w\hbar j$$

gegeben, wobei $w = \frac{\varepsilon H}{2c}$, j und m ganzzahlig und gleichzeitig $j \geqslant m$ und $j \geqslant 0$ sind. Weil k eine willkürliche reelle Konstante ist, so ist das Problem in stetiger Weise entartet.

Um die Gleichung:

$$\left\{\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}y\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}x\right) + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{ic}\alpha_4\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar c}E_0\right\} u =$$

$$= \lambda\,(\bar{\alpha}\alpha_1 + \bar{\beta}\alpha_2 + \bar{\gamma}\alpha_3)\; u\left[e^{i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{r}}{c}\right)} + e^{-i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{r}}{c}\right)}\right] \quad (5)$$

$\left(\lambda = -\frac{i\varepsilon a}{2\hbar c}\right)$ aufzulösen, wir entwickeln wir u nach den Potenzen von λ:

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

$$u = \psi_l e^{-i\frac{E_l}{\hbar}} + \lambda w + \lambda^2 v + \ldots$$

Vernachlässigt man die der zweiten und höheren Potenzen von λ proportionalen Ausdrücke, so ergibt sich:

$$\left\{\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}x\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}x\right) + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{ic}\alpha_4\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar c}E_0\right\} w =$$
$$= (\bar{\alpha}\alpha_1 + \bar{\beta}\alpha_2 + \bar{\gamma}\alpha_3)\,\psi_l\, e^{-\frac{E_l}{\hbar}t}\left[e^{i\omega\left(t - \frac{(\mathbf{n}\,\mathbf{r})}{c}\right)} + e^{-i\omega\left(t - \frac{(\mathbf{n}\,\mathbf{r})}{c}\right)}\right]. \quad (6)$$

Wir setzen:

$$w = w^{\pm}(x, y)\, e^{i\left(\frac{p}{\hbar} \pm \gamma\frac{\omega}{c}\right)} . e^{-i\left(\frac{E_l}{\hbar} \pm \omega\right)t} \quad (7)$$

und führen die Bezeichnungen $\bar{\rho} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$, $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta$ ($\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ sind die Einheitsvektoren in der x- und y-Richtung), $\psi^l = \chi^l(x, y)\, e^{i\frac{p}{\hbar}z}$ ein. Dann erhalten wir aus (6):

$$\left\{\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}y\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\varepsilon H}{2\hbar c}x\right) + i\alpha_3\left(\frac{p}{\hbar} \pm \gamma\frac{\omega}{c}\right) - \frac{1}{c}\alpha_4\left(\frac{E_l}{\hbar} \pm \omega\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\hbar c}E_0\right\} w^{\pm} = (\bar{\alpha}\alpha_1 + \bar{\beta}\alpha_2 + \bar{\gamma}\alpha_3)\,\chi^l\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}(\bar{\mathbf{n}}\bar{\rho})}. \quad (8)$$

Die Funktionen $\chi(x, y)$ sind orthogonal. Wir normieren sie auf 1, d. h. wir setzen $\iint \sum_{i=1}^{4} \chi_i(x, y) . \overset{*}{\chi}_i(x, y)\, dx\, dy = 1$. Die Integration ist dabei über die ganze xy-Ebene zu erstrecken.

Jetzt wollen wir die Funktion $\alpha_4\,(\bar{\alpha}\alpha_1 + \bar{\beta}\alpha_2 + \bar{\gamma}\alpha_3)\,\chi^l .\, e^{\pm i\omega\frac{(\bar{\mathbf{n}}\bar{\rho})}{c}}$ durch ein endliches Aggregat $\sum_n A^{\pm}_{ln}\,\chi^n$ approximieren und setzen

$$w^{l\pm} = \sum_n B^{\pm}_{ln}\,\chi^n. \quad (9)$$

Aus (6) folgt dann nach der linksseitigen Multiplikation mit $\chi^{l*}\,\alpha_4$ und Integration über die ganze xy - Ebene:

$$B^{\pm}_{ln} = \frac{A^{\pm}_{ln}}{C_n\,\gamma\frac{\omega}{c} - \frac{E_l - E_n \pm \hbar\omega}{\hbar c}}, \quad (10)$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

$$C_n = \frac{2\left\{\frac{4\,w\,\hbar\,j}{k} - \left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_n+E_0}{c} - p\right)\left(\frac{E_n-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right)\right.}{\left\{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)4\,w\,\hbar\,j_n + \left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_n+E_0}{c} - p\right)^2 + \left(\frac{E_n-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right)^2\right\}},$$

wobei

$$A^{\pm}_{ln} = \int \chi^{l*}\,(\bar{\alpha}\,\alpha_4\,\alpha_1 + \bar{\beta}\,\alpha_4\,\alpha_2 + \bar{\gamma}\,\alpha_4\,\alpha_3)\,\chi^{l}\,e^{\pm i\,\omega\,\frac{(\bar{\mathfrak{n}},\bar{\rho})}{c}}\,df$$

und df das Flächenelement bezeichnet.

Bei der Berechnung von C_n wurden die Funktionen $\chi(x,y)$ für $m>0$ mit dem Normierungsfaktor:

$$\frac{1}{N_{r_1\varphi}} = \left\{\frac{[(m-1)!]^2(j-m)!}{(j-1)!}\cdot\left(\frac{\hbar}{w}\right)^m \pi\left[\left(1+\frac{1}{k^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4w\hbar j}\left[\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E+E_0}{c} - p\right)^2 + \left(\frac{E-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right)^2\right]\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (11a)$$

und für $m<0$ mit

$$\frac{1}{N_{r_1\varphi}} = \left\{\frac{[(-m+1)!]^2(j-1)!}{(j-m)!}\cdot\left(\frac{\hbar}{w}\right)^{-m+2} \pi\left[\left(1+\frac{1}{k^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4w\hbar j}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{E+E_0}{c} - p\right)^2 + \left(\frac{E-E_0}{c} - \frac{p}{k}\right)^2\right]\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (11b)$$

multipliziert. Die Normierungsfaktoren $\frac{1}{N_{r_1\varphi}}$ berechnet man in üblicher Weise aus (3) und (4).

Um die Funktionen ψ nach z zu normieren, setzen wir

$$\int \frac{1}{N_{(p)}}\cdot\frac{1}{N_{(p')}}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')\,z}\left[\int \sum_{i=1}^{4} \chi_i^*(p')\,\chi_i(p)\,df\right] dz = \delta\,(p-p'),$$

wobei $\delta\,(p-p')$ die Diracsche Funktion bezeichnet. Integriert man (12) nach p' über ein beliebiges Gebiet des Impulsraumes, das die Stelle $p'=p$ enthält, so ergibt sich auf Grund des Fourierschen Integraltheorems

$$\frac{2\,\pi\,\hbar}{N_{(p)}^2} = 1.$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (5) wird durch $\int u(p)\,dp$ gegeben.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

III. Wir gehen nun zur Berechnung des Streustrahlungsfeldes über. Die elektrische Stromdichte, die einem Übergang $l \to l'$ entspricht, ist durch

$$\mathfrak{J} = u^{l}(p)\, \alpha_1 \vec{\alpha}\, u^{l'*}(p') =$$

$$= \mathfrak{J}_0 + \lambda\, e^{-i(\omega-\omega_{ll'})t} \cdot e^{i\left(\frac{p}{\hbar}-\frac{p'}{\hbar}+\gamma\frac{\omega}{c}\right)z} [w^{l+}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, \chi^{l'*}(p') -$$

$$- \chi^{l}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, w^{l'-*}(p')] + \tag{14}$$

$$+ \lambda\, e^{i(\omega+\omega_{ll'})t}\, e^{i\left(\frac{p}{\hbar}-\frac{p'}{\hbar}-\gamma\frac{\omega}{c}\right)z} [w^{l-}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, \chi^{l'*}(p') -$$

$$- \chi^{l}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, w^{l'+*}(p')]$$

bestimmt, wobei $\mathfrak{J}_0$ die zu den ungestörten Eigenfunktionen gehörige Stromdichte, $\vec{\alpha}$ den Vektoroperator mit den Komponenten α_1, α_2, α_3 und das Symbol * die Bildung der konjugiert-komplexen Grösse bezeichnet.

Wir wollen von dem Strom $\mathfrak{J}$ nur denjenigen Teil in Betracht ziehen, der der Frequenz $\nu - \nu_{ll'} = \nu - 2\pi \frac{E_{l'} - E_l}{\hbar}$ entspricht. Das durch den betrachteten Strom hervorgerufene elektromagnetische Feld wird durch

$$\mathfrak{A}' = \frac{\lambda}{Rc} e^{-i(\omega-\omega_{ll'})\left(t-\frac{R}{c}\right)} \int \mathfrak{J}\, e^{-\frac{i}{c}(\omega-\omega_{ll'})(\mathfrak{n}'\mathfrak{r})}\, d\tau = \tag{15}$$

$$= \frac{\lambda}{Rc} e^{-i(\omega-\omega_{ll'})\left(t-\frac{R}{c}\right)} \int\int dp\, dp' \Big\{ \int e^{i\left[\frac{p-p'}{\hbar}+\frac{1}{c}(\gamma\omega-\gamma'\omega+\gamma'\omega_{ll'})\right]z} dz.$$

$$\int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i\frac{\omega-\omega_{ll'}}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\bar{\rho})} \left[w^{l+}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, \chi^{l'*}(p') - \chi^{l}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, w^{l'-*}(p')\right] \Big\}$$

gegeben. Die Integration nach p und p' ist über den ganzen in Betracht kommenden Impulsraum und nach z über das ganze dem Elektron zur Verfügung stehende Gebiet zu erstrecken. $\mathfrak{n}' = \bar{\mathfrak{n}}' + \mathfrak{k}\gamma'$ bezeichnet dabei den Einheitsvektor in der Beobachtungsrichtung.

Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\frac{c}{\omega} \vec{J}(p, p') = \int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \Big[w^{l+}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, \chi^{l'*}(p') -$$

$$- \chi^{l}(p)\, \alpha_4 \vec{\alpha}\, w^{l'-*}(p') \Big] e^{-i\frac{\omega-\omega_{ll'}}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\bar{\rho})} \tag{16}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

ein, so ergibt sich aus (9) und (10):

$$\frac{c}{\omega}\vec{J}(p,p')=\sum_n\left[\frac{A_{ln}^{+}\,\vec{Q}_{nl'}}{C_n\,\frac{\gamma}{c}\,\omega-\frac{E_l-E_{l'}+\hbar\omega}{\hbar c}}-\frac{A_{nl'}^{-*}\,\vec{Q}_{ln}}{C_{n'}\,\frac{\gamma}{c}\,\omega+\frac{E_n-E_l'-\hbar\omega}{\hbar c}}\right], \tag{17}$$

worin

$$\vec{Q}_{nl'}=\int_0^\infty r\,d\,r\int_0^{2\pi}d\varphi\,\chi^n(p)\,\alpha_4\,\vec{\alpha}\,\chi^{l'*}(p')\,e^{-i\frac{\omega-\omega ll'}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\,\bar{\rho}')}\quad\text{und}$$

$$\vec{Q}_{ln}=\int_0^\infty r\,d\,r\int_0^{2\pi}d\varphi\,\chi^l(p)\,\alpha_4\,\vec{\alpha}\,\chi^{n*}(p')\,e^{-i\frac{\omega-\omega ll'}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\,\bar{\rho}')}$$

sind.

In der Entwicklung der Funktion $(\mathfrak{m},\alpha_4\,\vec{\alpha})\,\chi^l\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r})}$ nach den Eigenfunktionen des ungestörten Problems wollen wir nur diejenigen Eigenfunktionen berücksichtigen, für die die Eigenwerte die Ungleichung $(E_n-E_{l(l')})\ll\hbar\,\omega$ erfüllen. Weil aber $\frac{(E_n-E_{l(l')})}{\hbar\,\omega}$ von der Grössenordnung $\frac{w}{\mu\,\omega}\sim 10^{-8}$ ist, kann man eine grosse Anzahl der Entwicklungsglieder (mindestens von der Grössenordnung 10^6) berücksichtigen und daher den Approximationsfehler genügend klein machen. Dabei nehmen wir an, dass die Wellennormale des einfallenden Lichtes zu der z-Richtung senkrecht steht ($\gamma=0$).

Unter diesen Annahmen kann man (16) aus den Entwicklungen:

$$(\mathfrak{m},\alpha_4\,\vec{\alpha})\,\chi^l(p)\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}(\bar{\mathfrak{n}}\,\bar{\rho})}=\sum_n A_n^{\pm}\,\chi^n(p),$$

$$\alpha_4\,\vec{\alpha}\,\chi^{l'}(p')\,e^{-i\frac{\omega-\omega ll'}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\,\bar{\rho}')}=\sum_n Q_{nl'}\,\chi^n(p),$$

$$\chi^l(p)\,\alpha_4\,\vec{\alpha}\,e^{-i\frac{\omega-\omega ll'}{c}(\bar{\mathfrak{n}}'\,\bar{\rho}')}=\sum_n Q_{ln}\,\chi^n(p')$$

berechnen. Daraus ergibt sich:

$$\vec{J}(p,p')=\int_0^\infty r\,d\,r\int_0^{2\pi}d\varphi\Big\{(\mathfrak{m},\alpha_4\,\vec{\alpha})\,\chi^l(p)\,\alpha_4\,\vec{\alpha}\,\chi^{l'*}(p')-$$

$$-\chi^l(p)\,\alpha_4\,\vec{\alpha}\,(\mathfrak{m},\alpha_4\,\vec{\alpha})\,\chi^{l'*}(p')\Big\}\,e^{i\left(\bar{\mathfrak{n}}\frac{\omega}{c}-\bar{\mathfrak{n}}'\frac{\omega-\omega ll'}{c},\,\bar{\rho}'\right)}. \tag{18}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

Das Integral (18) besitzt nur dann von Null verschiedene Werte, wenn

$$\bar{\mathfrak{n}}\,\frac{\omega}{c} - \bar{\mathfrak{n}}'\,\frac{\omega-\omega_{ll'}}{c} = 0 \tag{19}$$

ist.

Man kann die Integration über p, p' und z auf Grund des Fourierschen Integraltheorems ausführen. Es folgt dann:

$$\mathfrak{A}' = \frac{\lambda}{\omega R} e^{-i(\omega-\omega_{ll'})\left(z-\frac{R}{c}\right)} \int \frac{dP}{A} \int\int \frac{\vec{J}(p,p')}{A'} e^{-\frac{i}{\hbar}(P-P')z}\, dz\, dP' =$$

$$= \frac{2\hbar\pi\lambda}{R\omega} e^{-i(\omega-\omega_{ll'})\left(z-\frac{R}{c}\right)} \int \frac{dP}{AA'} \vec{J}(P,P), \tag{20}$$

worin

$$P = p - \gamma' \frac{E_l + \hbar\omega}{c},$$

$$P' = p' - \gamma' \frac{E_{l'}}{c}$$

ist. A und A' bezeichnen die Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial p}$ und $\frac{\partial P'}{\partial p'}$. p' ist dann den Gleichungen

$$P = P',$$

$$E_l + \hbar\omega = E_{l'} + \hbar\omega' \tag{21}$$

entnommen.

Gl. (19) und (21) sind dann identisch mit den Compton-Debyeschen Relationen. Für den Fall $2\pi\hbar\omega \ll \mu c^2$ und $p = 0$ erhält man daraus:

$$\Delta\nu = \frac{2\pi\hbar\nu^2}{\mu c^2}(1-\cos\vartheta) + 2\pi\bar{\omega}\Delta j, \tag{22}$$

wobei $\bar{\omega} = \frac{\varepsilon H}{4\pi\mu c}$ ist und ϑ den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Wellennormale des einfallenden Lichtes bedeutet.

Man könnte also aus (22) den Schluss ziehen, dass neben dem zerstreuten Comptonlicht, welches dem freien Elektron entspricht, im magnetischen Felde noch ein zerstreutes Licht von der Art der Ramanstrahlung zu erwarten sei. Die Frequenz dieser „verschobenen" Linien wäre dann gleich der Summe bzw. Differenz der Frequenz der Comptonstrahlung und der Frequenz, die dem Übergang zwischen den stationären Zuständen entspricht. Wir wollen nun die Intensitätsverhältnisse der beiden Linienarten berechnen.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

IV. Nach Gordon[1]) findet man aus (29) für einen einzelnen Übergang:

$$\mathfrak{A}' = \frac{2\pi\lambda\hbar}{R\omega}\, e^{-(i\omega-\omega ll')\left(t-\frac{R}{c}\right)}\, \frac{\vec{J}(P,P)}{\sqrt{AA'}}. \tag{23}$$

Das Integral $\vec{J}(P,P)$ ist nur für den Übergang $m, j \to m, j$ von Null verschieden. Für die Übergänge $\Delta m \neq 0$ und $\Delta j \neq 0$ ist $\vec{J}(P,P) = 0$[2]). Mit anderen Worten: Das magnetische Feld übt keinen Einfluss auf die Frequenz des gestreuten Lichtes aus.

Für den Übergang $m, j \to m, j$ ergibt sich:

$$B = \frac{4\left(1+\frac{1}{kk'}\right)w\hbar j + \left[\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_l+E_0}{c}-p\right)\right.}{\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)w\hbar j + \left(\frac{1}{k}\frac{E_l+E_0}{c}-p\right)^2+\left(\frac{E_l-E_0}{c}-\frac{p}{k}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left.\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)+\left(\frac{E_l-E_0}{c}-\frac{p}{k}\right)\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)\right]}{\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k'^2}\right)w\hbar j+\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)^2+\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)^2}},$$

$$J_x = 2i\bar{\beta}B, \quad J_y = 2i\bar{\alpha}B, \quad J_z = 0. \tag{24}$$

Aus (22) erhält man den magnetischen Vektor der zerstreuten elektromagnetischen Welle:

$$\mathfrak{H}' = \operatorname{rot}\mathfrak{A}' = \frac{a\,\varepsilon^2\,\pi}{cR\omega}\sqrt{\frac{E_{l'}}{\mu\, c^2}}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)[\mathfrak{n}', \vec{J}(P,P)]. \tag{25}$$

Dadurch wird die Polarisation und die Intensität des zerstreuten Lichtes bestimmt. Demnach ist die Intensität proportional der Grösse $|\vec{J}|^2 = |B|^2$. Weil aber $w\hbar$ von der Grössenordnung $5{,}1 \cdot 10^{-47}\, H$, also im Vergleich mit anderen Grössen in (24) klein ist, so ergibt sich daraus, dass die Intensität der Compton-Linien, wenigstens für die praktisch erreichbaren Feldstärken, von der Feldstärke unabhängig und der Intensität der Linien im verschwindenden magnetischen Felde gleich ist. Auch

[1]) W. Gordon, ZS. f. Phys. *40*, 117, 1927.

[2]) Vgl. Anmerkung.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1

die Intensität wird also vom magnetischen Felde nicht beeinflusst. Dieses Resultat ist in voller Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis von Bothe.

Das Elektron verhält sich also im magnetischen Felde und zwar in Bezug auf die Comptonstreuung so, als ob es frei wäre. Der Grund dieses Verhaltens ist in der Tatsache zu suchen, dass das Elektron im magnetischen Felde noch eine von demselben unbeeinflusste Bewegungsrichtung besitzt. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit der Absorption und der Emission gleich Null.

Zum Schluss sei es mir erlaubt, Herrn Prof. Dr. S. Szczeniowski für sein förderndes und lebhaftes Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, sowie für seine wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Institut für theoretische Physik der Universität Lwów.

Eingegangen am 30. Juni 1934.

Anmerkung. Die genaue Berechnung zeigt, dass auch die Übergänge m, $j \to m+1$, $j+1$ und m, $j \to m-1$, $j-1$ erlaubt sind. Für die Übergänge m, $i \leftrightarrows m+1$, $j+1$ erhält man, falls $m > 0$ ist:

$$B = \frac{4\sqrt{\frac{w\hbar\, m^2}{j}}\left[\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)\right]}{\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)w\hbar\, j+\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_l+E_0}{c}-p\right)^2+\left(\frac{E_l-E_0}{c}-\frac{p}{k}\right)^2}\cdot\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k'^2}\right)w\hbar\,(j+1)+\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)^2+\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)^2}} \tag{26}$$

und falls $m < 0$ ist:

$$B = \frac{2\sqrt{\frac{w\hbar}{j}}\left[\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)\right]}{\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)w\hbar\, j+\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{E_l+E_0}{c}-p\right)^2+\left(\frac{E_l+E_0}{c}-\frac{p}{k}\right)^2}\cdot\sqrt{4\left(1+\frac{1}{k'^2}\right)w\hbar\,(j+1)+\left(\frac{1}{k'}\cdot\frac{E_{l'}+E_0}{c}-p'\right)^2+\left(\frac{E_{l'}-E_0}{c}-\frac{p'}{k'}\right)^2}}. \tag{27}$$

Dabei ist: $J_x = J_y = -2\, i\, \bar{\gamma}\, B$, $\quad J_z = -(\bar{\alpha} + i\, \bar{\beta})\, B$.

Wenn wir die Gl. (24) mit (26) und (27) vergleichen, so finden wir, dass die Intensitätsverhältnisse der „verschobenen" Linien und der Comptonlinien von der Grössenordnung $w\hbar$ also verschwindend klein sind.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. III (1934) Fasc. 1