

DIE FRAUNHOFERSCHEN BEUGUNGSERSCHEINUNGEN DER ELASTISCHEN WELLEN

(The Fraunhofer Diffraction Phenomena of Elastic Waves)

VON K. GNIADK

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Warszawa*

(Eingegangen am 10, März 1967)

Durch einen bekannten Grenzübergang wird aus dem vom Verfasser (1967) für den Frenelschen Fall angegebenen Ausdruck für die elastische Beugungswelle, eine Fraunhofersche Beugungswelle im Falle einer einfallenden ebenen Dilatations- oder Schiebungswelle erhalten. Die angegebenen Ausdrücke für die elastische Fraunhofersche Beugungswelle erleichtern die praktische Berechnung dieser Beugungserscheinungen, insbesondere im Falle wo der beugende Rand nicht eben ist sondern durch eine Raumkurve gegeben wird. Aus den erhaltenen Ausdrücke ergibt sich, dass z.B. die einer einfallenden Dilatationswelle entsprechende Fraunhofersche Beugungswelle aus einer Dilatations- und einer Schiebungswelle besteht. Als Spezialfall werden die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen elastischer Wellen an einer rechteckigen Öffnung angegeben.

§ 1. Fraunhofersche Beugungserscheinungen im Falle von Dilatationswellen

Im folgenden betrachten wir die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen elastischer Wellen im Falle einer einfallenden ebenen Dilatationswelle mit harmonisch-periodischer Zeitabhängigkeit.

Die Verschiebung u_l , die in einem Punkte Q des elastischen Mediums erzeugt wird, wird im Falle einer punktförmigen Quelle bei unbehinderter Ausbreitung durch

$$u_l = \text{grad} \frac{e^{ik_1 \varrho}}{ik_1 \varrho} \quad (1.1)$$

gegeben. Dabei bedeutet $\varrho = LQ$ die Entfernung des Punktes Q von dem Quellpunkte L .

Nehmen wir an, dass wir es mit einem Beugungsproblem für einen Kirchhoffschen Schirm zu tun haben, der für die elastischen Wellen in der gleichen Weise wie im optischen Falle definieren werden kann (Knopoff 1956, Gniadek 1967).

Unseren Betrachtungen legen wir den Kirchhoffschen Ansatz für die elastischen Wellen zu Grunde. Bezeichnet f eine den beugenden Rand B überspannende Fläche, so wird, dem

* Adresse: Politechnika Warszawska, Katedra Fizyki Ogólnej "D" Warszawa, ul. Narbutta 84, Polska.

Kirchhoff'schen Ansatz gemäss, die Verschiebung im Halbraume hinter dem Schirme (der Schattenhalbraum im optischen Falle) durch

$$\mathbf{u}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_f [\hat{I}(P, Q) G_Q \mathbf{u}(Q) - \mathbf{u}(Q) G_Q \hat{I}(P, Q)] df_Q \quad (1.2)$$

gegeben (Petykiewicz 1966).

Es bezeichnet hier Q einen Punkt auf der den beugenden Rand B überspannende Fläche f , über die integriert wird, und P einen Beobachtungspunkt. $\mathbf{u}(Q)$ ist eine Lösung der Bewegungsgleichung für das elastische Medium

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -d\omega^2 \mathbf{u} \quad (1.3)$$

in der λ und μ die Lameschen Konstanten und d die Dichte des Mediums bezeichnet. \hat{I} ist ein durch die Vektorfelder

$$\Gamma^{(k)} = \frac{1}{\omega^2} \left[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\boldsymbol{\delta}^{(k)} \frac{e^{ik_3 r}}{r} \right) - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\boldsymbol{\delta}^{(k)} \frac{e^{ik_3 r}}{r} \right) \right], \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

definierter Tensor, in dem in der ersten bzw. zweiten und dritten Zeile die x , y , z -Komponenten des Vektors $\Gamma^{(1)}$ bzw. $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ auftreten. Die Vektoren $\boldsymbol{\delta}^{(1)}$, $\boldsymbol{\delta}^{(2)}$, $\boldsymbol{\delta}^{(3)}$ bedeuten die drei Einheitsvektoren eines Kartesischen Koordinatensystems. $r = PQ$ ist die Entfernung des Beobachtungspunktes P von dem Integrationspunkte Q . G_Q bezeichnet den an den Koordinaten des Punktes Q angreifenden Operator

$$G_Q = (\alpha + \mu) \frac{\partial n}{\partial} + \beta \mathbf{n} \operatorname{div} + \alpha (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}) \quad (1.5)$$

Hier ist \mathbf{n} die äussere Normale an die Fläche f . α und β sind beliebige, nur durch die Bedingung

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu \quad (1.6)$$

verknüpfte Konstante.

Wie Petykiewicz (1966) gezeigt hat, kann der Kirchhoff'sche Ansatz (1.2) auch in der Gestalt

$$4\pi \mathbf{u}(P) = (\alpha + \mu) \int_f \operatorname{Rot} (\hat{I} \times \mathbf{u}) d\mathbf{f} + \int_f \operatorname{Rot} \hat{W} d\mathbf{f} \quad (1.7)$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnet \hat{W} ein elastisches Tensorpotential. Für die Komponenten des Tensors \hat{W} , im Falle wo einfallende Welle durch (1.1) gegeben ist, ergibt sich dabei (vgl. Guadek 1957) die nachstehende Darstellung

$$\begin{aligned} W_{ij} = & \frac{\alpha^2}{\omega^2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{e^{ik_1 \varrho}}{ik_1 \varrho} \operatorname{rot}_j \left[\boldsymbol{\delta}^{(l)} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_3 r}}{r} \right) \right] + \\ & + \frac{e^{ik_1 r}}{r} \left(\boldsymbol{\delta}^{(l)} \times \operatorname{grad} \frac{e^{ik_1 \varrho}}{ik_1 \varrho} \right)_j + (\boldsymbol{\delta}^{(l)} \operatorname{grad}_L) \left(\frac{e^{ik_1 \varrho(r+\varrho)}}{r\varrho} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho}}{r\varrho + \mathbf{r}\boldsymbol{\rho}} \right)_j, \quad (l, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Mit Hilfe eines tensoriellen Stockesschen Satzes (vgl. z. B. Rubinowicz 1962) können die beiden Integrale in (1.7) in Linienintegrale über den beugenden Rand B sowie um die auf

der Fläche f befindlichen singulären Stellen des Tensorpotentials \hat{W} umgeformt werden. Das durch das Linienintegral über den beugenden Rand B gegebene Vektorfeld

$$\mathbf{u}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_B [(\alpha + \mu) \hat{\Gamma} \times \mathbf{u} + \hat{W}] d\mathbf{s}_Q \quad (1.9)$$

soll als die elastische Beugungswelle bezeichnet werden. Der von der singulären Stellen des Tensorpotentials \hat{W} auf der Fläche f herrührende Anteil der Wellenbewegung, stellt eine „geometrisch-elastische“ Welle dar. Der Ausdruck (1.9) soll im folgenden auch als das Beugungsintegral bezeichnet werden.

Um in (1.9) den Grenzübergang zur Fraunhofersche Beugungswelle durchführen, bezeichnen wir mit α_L bzw. α_P den Einheitsvektor in der Richtung in der wir die Wellenquelle L bzw. den Beobachtungspunkt P von einem in der Nähe des beugenden Randes liegenden, fixen Punkte \hat{O} aus ins Unendliche rücken lassen. Der Einheitsvektor α_L , bezeichnet somit die Richtung in der die elastische Welle aus dem Unendlichen auf die beugende Öffnung auffällt und der Einheitsvektor α_P die Richtung in der wir auf die beugende Öffnung blicken.

Bei dem Grenzübergang genügt es im Integranden des Beugungsintegrals (1.9) ausserhalb der Exponentialfunktion

$$\varrho = \varrho_0 \alpha_L, \quad r = r_0 \alpha_P \quad (1.10)$$

anzunehmen. Dabei bezeichnet ϱ_0 bzw. r_0 die Entfernung der Wellenquelle L bzw. des Beobachtungspunktes P von einem fixen Punkte \hat{O} in der beugenden Öffnung. Ferner können wir in der Exponentialfunktion für ϱ und r die Näherungen

$$\varrho = \varrho_0 + \mathbf{R}\alpha_L, \quad r = r_0 + \mathbf{R}\alpha_P \quad (1.11)$$

verwenden. Dabei stellt \mathbf{R} den Vektor dar, der die Lage des Randelementes ds in Bezug auf den fixen Punkt \hat{O} festlegt. Um die Amplitude der Wellenfunktion beim Grenzübergang im Beobachtungspunkte P festzuhalten, dividieren wir überdies die Beugungswelle (1.9) durch den Amplituden- und Phasenfaktor

$$\frac{e^{ik_1(r_0 + \varrho_0)}}{r_0 \varrho_0},$$

Setzen wir im Beugungsintegral (1.9) für $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_l$ den Ausdruck (1.1) ein und vernachlässigen wir bei dem Grenzübergang die im Integranden auftretenden Glieder mit $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2\varrho}$, $\frac{1}{r^3\varrho}$, $\frac{1}{r\varrho^2}$ und $\frac{1}{r^3\varrho^2}$, so erhalten wir bei Berücksichtigung der Näherungen (1.10) und (1.11) für die Wellenfunktion den nachstehenden Ausdruck

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{u}_P = & \int_B \alpha_P \left[\frac{\alpha + \mu}{\lambda + 2\mu} (\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0 \right] e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds - \\ & - e^{i(k_2 - k_1)r_0} \int_B \alpha_P \times \left[\alpha_P \times \left(\frac{\alpha + \mu}{\mu} \alpha_L \times \mathbf{s}_0 \right) - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{s}_0 \right] e^{i\mathbf{R}(k_1 \alpha_L + k_2 \alpha_P)} ds + \\ & + \int_B \left\{ (\alpha_L - \alpha_P) \times \mathbf{s}_0 - \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \alpha_L}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds \end{aligned} \quad (1.12)$$

den wir als die Fraunhofersche elastische Beugungswelle bezeichnen werden. Wir bemerken novh, dass im betrachteten Falle die in den Integranden in (1.12) auftretenden Richtungsfaktoren konstant sind und daher vor das Integralzeichen gesetzt werden können.

Wir wollen noch zeigen, dass der im letzten Integral in (1.12) auftretende Richtungsfaktor die Richtung α_P hat. Um diesen Nachweis zu erbringen, führen wir zunächst die Abkürzungen

$$\alpha_0 = \alpha_L + \alpha_P, \quad \beta_0 = \alpha_L - \alpha_P \quad (1.13)$$

ein. Da α_P und α_L Einheitsvektoren sind, folgt unmittelbar dass

$$\alpha_0^2 = 2(1 + \alpha_P \alpha_L) \quad (1.14)$$

$$\alpha_0 \beta_0 = 0 \quad (1.15)$$

ist.

Wie man leicht mit Rücksicht auf (1.15) und auf die Vektorrelation

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

verifizieren kann, kann das letzte Integral in (1.12) durch die Vektorsumme

$$\begin{aligned} & \int_B \left\{ (\alpha_L - \alpha_P) \times \mathbf{s}_0 - \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \alpha_L}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds \\ &= \int_B \frac{\alpha_P [(\beta_0 \times \mathbf{s}_0) \alpha_0]}{\alpha_0^2} e^{ik_1 \mathbf{R} \alpha_0} ds + \int_B \frac{(\beta_0 \times \alpha_0) (\alpha_0 \mathbf{s}_0)}{\alpha_0^2} e^{ik_1 \mathbf{R} \alpha_0} ds \end{aligned} \quad (1.16)$$

dargestellt werden. Da ferner $\alpha_0 e^{ik_1 \mathbf{R} \alpha_0} = 1/ik_1 \text{ grad } e^{ik_1 \mathbf{R} \alpha_0}$ ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf den bekannten Integralsatz

$$\int \text{grad } \varphi \, d\mathbf{s} = 0 \quad (1.17)$$

das Verschwinden des zweiten auf der rechten Seite von (1.16) auftretenden Integrals. Aus (1.16) erhält man daher bei Berücksichtigung von (1.14) die nachstehende Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_B \left\{ (\alpha_L - \alpha_P) \times \mathbf{s}_0 - \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \alpha_L}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds \\ &= \int_B \frac{\alpha_P [(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0]}{1 + \alpha_P \alpha_L} e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Wegen (1.18) ergibt sich aus (1.12) der folgende Ausdruck für die Fraunhofersche Beugungswelle

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{u}_F &= \alpha_P \int_B [(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \left(\frac{\alpha + \mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right) e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} ds - \\ &- e^{i(k_2 - k_1)r_0} \alpha_P \times \int_B \left[\frac{\alpha + \mu}{\mu} \alpha_P \times (\alpha_L \times \mathbf{s}_0) - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{s}_0 \right] e^{i\mathbf{R}(k_1 \alpha_L + k_2 \alpha_P)} ds. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Aus dem letzten Ausdruck ist ersichtlich, dass die Wellenbewegung in einem Beobachtungspunkt P aus zwei Arten von Wellen besteht. Die eine Welle ist longitudinal und breitet sich mit der Geschwindigkeit $a = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{d}\right)^{1/2}$ der Dilatationswelle aus. Die andere Welle deren Verrückungen normal zu der Ausbreitungsrichtung sind, pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $b = \left(\frac{\mu}{d}\right)^{1/2}$ der Schiebungswelle fort. Diese beiden Teilwellen der Wellenbewegung (1.19) sollen als die Fraunhofersche Longitudinalwelle \mathbf{u}_F^l bzw. Transversalwelle \mathbf{u}_F^t bezeichnet werden. Da die Longitudinalwelle \mathbf{u}_F^l und die Transversalwelle \mathbf{u}_F^t verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten besitzen, so tritt zwischen beiden Wellen eine Phasenverschiebung auf, die mit wachsender Entfernung des Beobachtungspunktes P von der beugenden Öffnung zunimmt. Wirken die Kräfte im Quellpunkte L nur in einem endlichen Zeitintervall, so tritt im Beobachtungspunkte P keine Überlagerung der Fraunhoferschen Longitudinalwelle \mathbf{u}_F^l und der Fraunhoferschen Transversalwelle \mathbf{u}_F^t auf, denn der Wirbelfreie Wellenzug ist in einem Punkte P bereits vorüber gegangen bevor die Transversalwelle in diesem Punkt ankommt. Die beiden Wellenzüge treten demnach im Falle der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen getrennt auf.

Es mag noch bemerkt werden, dass im Falle wo der beugende Rand B aus einer geschlossenen, ganz im Endlichen verlaufenden Kurve besteht, der der Transversalwelle \mathbf{u}_F^t entsprechende Anteil von \mathbf{u}_F für alle Richtungen α_P ausnahmslos stetig und endlich ist. Der Anteil der Fraunhoferschen Beugungswelle (1.19), der der Longitudinalwelle \mathbf{u}_F^l entspricht, ist überall endlich und mit Ausnahme der zur Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle entgegengesetzten Richtung $\alpha_P = -\alpha_L$, auch überall stetig. In der Blickrichtung verschwindet, ebenso wie im optischen Falle (vgl. Rubinowicz 1966), der Nenner der in den Integranden in dem ersten Integral in (1.19) auftritt. Dennoch bleibt die Fraunhofersche Longitudinalwelle in diesem Grenzfall endlich, da dann auch das Integral

$$\int_B e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} d\mathbf{s} \quad (1.20)$$

für jede geschlossene Kurve linear mit $|\alpha_P + \alpha_L|$ verschwindet. Die Unstetigkeit der Fraunhoferschen Longitudinalwelle \mathbf{u}_F^l im Grenzfall $\alpha_P \rightarrow -\alpha_L$ wird durch die Tatsache bedingt, dass die Beugungswelle (1.9) im Falle der Fresnelschen Beugungserscheinungen in der „Schattengrenze“ unsteigt ist.

Als Beispiel wollen wir nun die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen einer Dilatationswelle an einer ebenen, rechteckigen Öffnung betrachten. Um die Fraunhofersche Beugungswelle (1.19) anzugeben, müssen wir das über den beugenden Rand erstreckte Integral

$$\int_B e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} d\mathbf{s} \quad \text{bzw.} \quad \int_B e^{i\mathbf{R}(k_1 \alpha_L + k_2 \alpha_P)} d\mathbf{s} \quad (1.21)$$

berechnen. Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst den Beitrag eines Teiles des beugenden Randes zum Integral (1.21) der aus einer Geraden g von der Länge A besteht. Bezeichnet \mathbf{R}_0 den Vektor der die Lage des Mittelpunktes von g festlegt und \mathbf{s}_0 den Einheitsvektor in

der Richtung von g , so ist die Lage der einzelnen Punkte auf der Geraden g durch $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{s}_0 s$ bestimmt. Für den Beitrag der Geraden g zum Integral (1.21) ergibt sich daher der Ausdruck

$$\int_{-A/2}^{+A/2} e^{ik_1 \mathbf{R}(\alpha_P + \alpha_L)} \mathbf{s}_0 ds = \mathbf{s}_0 e^{ik_1 \mathbf{R}_0(\alpha_P + \alpha_L)} \int_{-A/2}^{+A/2} e^{ik_1 \mathbf{s}_0(\alpha_P + \alpha_L) s} ds$$

$$= \mathbf{s}_0 e^{ik_1 \mathbf{R}_0(\alpha_P + \alpha_L)} A \frac{\sin [1/2 k_1 \mathbf{s}_0 (\alpha_P + \alpha_L) A]}{1/2 k_1 \mathbf{s}_0 (\alpha_P + \alpha_L) A}. \quad (1.22)$$

In unserem Falle, wo der beugende Rand durch die Seiten eines ebenen Rechtecks gegeben ist, besteht das Integral (1.21) aus einer Summe der den einzelnen Seiten entsprechenden Ausdrücke von der Gestalt (1.22). Bezeichnen $\mathbf{R}'_0, -\mathbf{R}'_0, \mathbf{R}''_0$ und $-\mathbf{R}''_0$ die Vektoren die

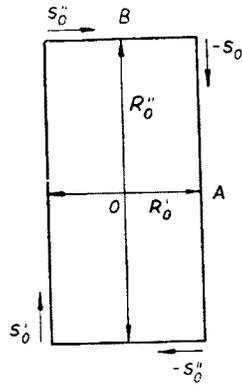


Abb. 1

die Lagen der einzelnen Seiten in Bezug auf den Mittelpunkt O (vgl. Abb. 1) des Rechtecks festlegen, so ergibt sich für die Fraunhofersche Beugungswelle (1.19) der nachstehenden Ausdruck

$$2\pi u_F = i\alpha_P \left(\frac{\alpha + \mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right) \cdot$$

$$\cdot [(\alpha_P \times \alpha_L) (\mathbf{s}'_0 A I_A^{(\alpha)} \sin k_1 \mathbf{R}'_0 \alpha_0 - \mathbf{s}''_0 B I_B^{(\alpha)} \sin k_1 \mathbf{R}''_0 \alpha_0)] -$$

$$- e^{i(k_2 - k_1)r_0} \alpha_P \times \left\{ \left[\frac{\alpha + \mu}{\mu} \alpha_P \times (\alpha_L \times \mathbf{s}'_0 A I_A^{(\gamma_0)} \sin k_1 \mathbf{R}'_0 \gamma_0 - \alpha_L \times \mathbf{s}''_0 B I_B^{(\gamma_0)} \sin k_1 \mathbf{R}''_0 \gamma_0) \right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} (\mathbf{s}'_0 A I_A^{(\gamma_0)} \sin k_1 \mathbf{R}'_0 \gamma_0 - \mathbf{s}''_0 B I_B^{(\gamma_0)} \sin k_1 \mathbf{R}''_0 \gamma_0) \right\}. \quad (1.23)$$

Dabei wurde hier zur Abkürzung

$$I_A^{(\alpha_0)} = \frac{\sin(1/2 k_1 \mathbf{s}'_0 \alpha_0 A)}{1/2 k_1 \mathbf{s}'_0 \alpha_0 A}, \quad I_A^{(\gamma_0)} = \frac{\sin(1/2 k_1 \mathbf{s}'_0 \gamma_0 A)}{1/2 k_1 \mathbf{s}'_0 \gamma_0 A}$$

$$I_B^{(\alpha_0)} = \frac{\sin(1/2 k_1 \mathbf{s}''_0 \alpha_0 B)}{1/2 k_1 \mathbf{s}''_0 \alpha_0 B}, \quad I_B^{(\gamma_0)} = \frac{\sin(1/2 k_1 \mathbf{s}''_0 \gamma_0 B)}{1/2 k_1 \mathbf{s}''_0 \gamma_0 B}$$

$$\alpha_0 = \alpha_P + \alpha_L, \quad \gamma_0 = \alpha_L + \frac{k_2}{k_1} \alpha_P$$

gesetzt. A und B bezeichnen die Längen der Seiten und die Einheitsvektoren \mathbf{s}'_0 , $-\mathbf{s}'_0$, \mathbf{s}''_0 und $-\mathbf{s}''_0$ legen die Richtungen der entsprechenden Seiten des Rechteckes fest. Im Grenzfalle $\alpha_P \rightarrow -\alpha_L$ ergibt (1.25) für die Fraunhofersche Longitudinalwelle \mathbf{u}'_F den Ausdruck

$$\mathbf{u}'_F = \frac{1}{2\pi} ik_1 \alpha_L [(\mathbf{s}'_0 \times \mathbf{s}''_0) \alpha_L] A \cdot B. \quad (1.24)$$

§ 2. Fraunhofersche Beugungserscheinungen im Falle von Schiebungswellen

Im laufenden Paragraphen befassen wir uns mit den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen im Falle einer einfallenden ebenen, harmonisch-periodischen Schiebungswelle.

Die Verschiebung \mathbf{u}_t in einem Punkte Q wird im Falle einer punktförmigen Quelle von Schiebungswellen durch

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{e} \times \text{grad} \frac{e^{ik_2 \varrho}}{ik_2 \varrho} \quad (2.1)$$

gegeben. Dabei ist $\varrho = LQ$ die Entfernung des Punktes Q vom Quellpunkte L und \mathbf{e} der Einheitsvektor der die Richtung Polarisation der Schiebungswelle \mathbf{u}_t festlegt. Die Komponenten des im Beugungsintegral (1.9) auftretenden Tensorpotentials W werden im Falle der Schiebungswelle (2.1) durch

$$W_{ij}^t = \frac{1}{k_2} \text{rot}_j \left(\mathbf{e} \times \text{grad} \frac{e^{ik_2 \varrho}}{ik_2 \varrho} \right) \cdot \text{div} \left[\delta^{(l)} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 r}}{r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{e^{ik_2 r}}{r} \left[\delta^{(l)} \times \left(\mathbf{e} \times \text{grad} \frac{e^{ik_2 r}}{ik_2 \varrho} \right) \right] + [\delta^{(l)} (\mathbf{e} \times \text{grad}_L)] \frac{e^{ik_2(r+\varrho)}}{ik_2 r \varrho} \frac{(\mathbf{r} \times \varrho)_j}{r \varrho + \mathbf{r} \varrho} \quad (l, j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

gegeben (vgl. Gniadek 1967).

Die Fraunhofersche Beugungswelle kann man im Falle wo die einfallende Welle, eine ebene Schiebungswelle ist durch den gleichen Grenzübergang wie in §. 1 erhalten. Mit Rücksicht auf (2.2) ergibt sich beim Grenzübergang im Beugungsintegral (1.9) für die Fraun-

hofersche Beugungswelle der nachstehenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
 4\pi\mathbf{u}_F = & e^{i(k_1-k_2)r_0} \int \alpha_P \left\{ \left[\left(\frac{\alpha+\mu}{\lambda+2\mu} \alpha_P + \alpha_L \right) \times \mathbf{t}_0 \right] \mathbf{s}_0 \right\} e^{i\mathbf{R}(k_2\alpha_L+k_1\alpha_P)} ds - \\
 & - \int_B \alpha_P \times [\alpha_P \times (\mathbf{t}_0 \times \mathbf{s}_0)] \left(\frac{\alpha+\mu}{\mu} + 1 \right) e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} ds - \\
 & - \int_B \left\{ [(\beta_0 \times \mathbf{t}_0) \mathbf{s}_0] \alpha_P + \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \mathbf{t}_0}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} ds. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir mit \mathbf{t}_0 den Vektor $\mathbf{e} \times \alpha_L$ bezeichnet. Wie man leicht mit Rücksicht auf (1.14), (1.15) und (1.17) verifizieren kann, besteht für das letzte Integral in (2.3) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \int_B \left\{ [(\beta_0 \times \mathbf{t}_0) \mathbf{s}_0] \alpha_P + \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0] \mathbf{t}_0}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} ds \\
 & = \int_B \alpha_P \times \left\{ (\alpha_P \times \mathbf{t}_0) \frac{[(\alpha_P \times \alpha_L) \mathbf{s}_0]}{1 + \alpha_P \alpha_L} \right\} e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} ds. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Wegen (2.4) erhalten wir aus (2.3) den folgenden Ausdruck für die Fraunhofersche Beugungswelle \mathbf{u}_F

$$\begin{aligned}
 4\pi\mathbf{u}_F = & -\alpha_P \times \left\{ \left[\left(\frac{\alpha+\mu}{\mu} + 1 \right) \alpha_P \times \left(\mathbf{t}_0 \times \int_B e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} \mathbf{s}_0 ds \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \frac{(\alpha_P \times \mathbf{t}_0)}{1 + \alpha_P \alpha_L} \left[(\alpha_P \times \alpha_L) \int_B e^{ik_2\mathbf{R}(\alpha_P+\alpha_L)} \mathbf{s}_0 ds \right] \right\} + \\
 & + e^{i(k_1-k_2)r_0} \alpha_P \left\{ \left[\left(\frac{\alpha+\mu}{\lambda+2\mu} \alpha_P + \alpha_L \right) \times \mathbf{t}_0 \right] \int_B e^{i\mathbf{R}(k_2\alpha_L+k_1\alpha_P)} \mathbf{s}_0 ds \right\}. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir in (2.5) die konstanten Richtungsfaktoren vor das Integralzeichen gesetzt. Es mag noch bemerkt werden, dass ebenso wie im vorigen Paragraphen, die Fraunhofersche Beugungswelle (2.5) durch eine Summe aus einer Longitudinalwelle \mathbf{u}'_F und aus einer Transversalwelle \mathbf{u}''_F gegeben wird. Dabei ist nun der der Longitudinalwelle entsprechenden Anteil von (2.5) ausnahmslos für alle Richtungen α_P stetig und endlich, während der Anteil der der Transversalwelle \mathbf{u}''_F entspricht überall endlich und mit Ausnahme der Blickrichtung $\alpha_P = -\alpha_L$ auch überall stetig ist.

Benutzen wir die in §. 1 verwendeten Bezeichnungen so wird die Fraunhofersche Beugungswelle (2.5) in Falle einer rechteckigen, ebenen Öffnung durch

$$2\pi\mathbf{u}_F = -i\alpha_P \times \left\{ \left(\frac{\alpha+\mu}{\mu} + 1 \right) \alpha_P \times \left[\mathbf{t}_0 \times (\mathbf{s}'_0 A I_A^{(\alpha_0)} \sin k_2 \mathbf{R}'_0 \alpha_0 - \mathbf{s}''_0 B I_B^{(\alpha_0)} \sin k_2 \mathbf{R}'_0 \alpha_0) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_P \times \mathbf{t}_0)}{1 + \boldsymbol{\alpha}_P \boldsymbol{\alpha}_L} \left\{ (\boldsymbol{\alpha}_P \times \boldsymbol{\alpha}_L) (s'_0 AI_A^{(\alpha_0)} \sin k_2 R'_0 \boldsymbol{\alpha}_0 - s''_0 BI_B^{(\alpha_0)} \sin k_2 R'_0 \boldsymbol{\alpha}_0) \right\} + \\
& + i e^{i(k_1 - k_2)r_0} \boldsymbol{\alpha}_P \left\{ \left[\left(\frac{\alpha + \mu}{\lambda + 2\mu} \boldsymbol{\alpha}_P \times \boldsymbol{\alpha}_L \right) \times \mathbf{t}_0 \right] (s'_0 AI_A^{(\delta_0)} \sin k_2 \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\delta}_0 - s''_0 BI_B^{(\delta_0)} \sin k_2 \mathbf{R}'_0 \boldsymbol{\delta}_0) \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

gegeben. Dabei bezeichnen $I_A^{(\delta_0)}$ und $I_B^{(\delta_0)}$ in (2.6)

$$I_A^{(\delta_0)} = \frac{\sin(1/2 k_2 s'_0 \boldsymbol{\delta}_0 A)}{1/2 k_2 s'_0 \boldsymbol{\delta}_0 A}, \quad I_B^{(\delta_0)} = \frac{\sin(1/2 k_2 s''_0 \boldsymbol{\delta}_0 B)}{1/2 k_2 s''_0 \boldsymbol{\delta}_0 B}, \quad \boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\alpha}_L + \frac{k_1}{k_2} \boldsymbol{\alpha}_P.$$

Im Grenzfalle $\boldsymbol{\alpha}_P \rightarrow -\boldsymbol{\alpha}_L$ erhalten wir aus (2.6) für die Fraunhofersche Transversalwelle \mathbf{u}'_F den nachstehenden Ausdruck

$$\mathbf{u}'_F = \frac{ik_2}{2\pi} AB \mathbf{t}_0 [\boldsymbol{\alpha}_L (s'_0 \times s''_0)] \tag{2.7}$$

Fällt die Schliebungswelle (2.1) senkrecht auf die beugende Öffnung, so ergibt (2.7) das Verschwinden der Fraunhoferschen Longitudinalwelle \mathbf{u}'_F in der Blickrichtung $\boldsymbol{\alpha}_P = -\boldsymbol{\alpha}_L$.

§ 3. Schlussbemerkungen

Zum Abschluss unserer Überlegungen wollen wir bemerken, dass der durch (1.10) und (1.11) definierte Grenzübergang, in der durch die Gl. (1.9) gegebenen elastischen Beugungswelle nur dann einwandfrei ausgeführt werden kann, wenn der beugende Rand B ganz im Endlichen liegt (vgl. Rubinowicz 1966). Nur in diesem Falle sind die in (1.19) bzw. (2.6) auftretenden Integrale, im gewöhnlichen Sinne konvergent. Geht der beugende Rand ins Unendliche, so nehmen diese Integrale den Charakter von Diracschen δ Funktionen an und es verhält sich somit die Fraunhofersche Beugungswelle wie eine δ Funktion.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass das Problem der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen elastischer Wellen an einem unendlichlangen Spalt im Kirchhoffschen Schirm bereits von Knopff (1956) behandelt wurde. Die Fraunhofersche Welle hat Knopff durch einen Grenzübergang aus seinem Ausdruck für Verschiebung \mathbf{u} (P) erhalten. Wie Petykiewicz (1966) gezeigt hat, kann bei Benutzung der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Bezeichnungen, der durch Knopff gegebenen Ausdruck für $\mathbf{u}(P)$ in der Gestalt

$$4\pi \mathbf{u}(P) = a^2 \int_B (\hat{\Gamma} \times \mathbf{u}) \, d\mathbf{s} + \int_j \hat{T} \, n \, df$$

dargestellt werden. Diesen Ausdruck können wir jedoch aus (1.7) erhalten, wenn wir $a = \lambda + \mu$ und $\text{Rot } \hat{W} = \hat{T}$ setzen. Er stellt somit nur einen Spezialfall des allgemeineren Ausdruckes (1.7) dar. Die Fraunhofersche elastische Welle hat Knopff nur im Spezialfall angegeben wo die Einfallrichtung der ebenen einfallenden Welle sowie die Beobachtungsrichtung senkrecht zu den Spaltbacken stehen.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass bei der Ableitung des Ausdruckes (1.19) bzw. (2.5) für die Fraunhofersche Beugungswelle über die Gestalt des beugenden Randes B keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht wurden. Er kann somit auch durch eine Raumkurve gegeben werden. In diesem Falle, ist die Verwendung der Ausdrücke (1.19) bzw. (2.5) zur praktischen Berechnung der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen viel einfacher als eine direkte Berechnung des im Frage kommenden Flächenintegrals. Im Falle, wo der beugende Rand ein räumliches Polygon ist, wird das in der Beugungswelle auftretende Integral (1.20) einfach durch eine Summe von Ausdrücken von der Gestalt (1.22) gegeben.

Herrn Professor Dr A. Rubinowicz möchte ich für wertvolle Hinweise und kritische Durchsicht des Manuskriptes, herzlich danken.

LITERATURVERZEICHNIS

- Gniadek, K., *Acta Phys. Polon.*, **31**, 443 (1967).
 Knopoff, L., *J. Acoust Soc., Amer.*, **28**, 217 (1956).
 Petykiewicz, J., *Acta Phys. Polon.*, **30**, 223 (1966).
 Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg—New York, PWN — Warszawa 1966.
 Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **21**, 451 (1962).