О КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

On Conform Invariancy of Equations Describing Particles with Arbitrary Spin

Я. М. Чиквашвили

Филиал Грузинского политехнического института*

(Поступила в редакцию 20 июля 1968)

Изучается вопрос о конформной инвариантности волновых уравнений, описывающих частицы с произвольным спином.

Вопрос о конформной инвариантности волновых уравнений изучался, например, в работах [1—7]. В первых трех из них рассматривалась ограниченная конформная группа (restricted conformal group) C_0, т.е. такие преобразования, которые переводят плоское пространство-время опять в плос коепространство-время. В работах [4—7] рассматривалась расширенная конформная группа (extended conformal group) C, т.е. такие преобразования, которые пространство-время с произвольным метрическим тензором $g_{\varrho\sigma}(x)$ переводят в пространство-время с метрическим тензором $\check{g}_{\varrho\sigma}(x) = e^{2q(x)}g_{\varrho\sigma}(x)$. Здесь и в дальнейшем $\check{A}$ обозначает конформный образ величины A. $q(x)$ — произвольная скалярная функция координат. В работе Паули [4] была доказана инвариантность уравнения Дирака относительно группы C. Вопрос о C — инвариантности волновых уравнений, описывающих частицы с произвольным спином, изучил Бухдал [5]. В настоящей работе рассматривается этот же вопрос.

В работе Бухдала изменение коэффициентов связности спинора при C — преобразовании пространства-времени было найдено путем решения уравнений, составленных на основе некоторых допущений[1]. В настоящей работе это изменение находится непосредственно, исходя из явного выражения названных коэффициентов. В результате этого полученный нами закон преобразования волновой функции, описывающей частицу с произвольным спином, существенно отличается от соответствующего закона Бухдала. В частном случае спина $\frac{1}{2}$ наш результат совпадает с результатом Паули [4]. Между тем общий формализм Бухдала не содержит этого частного случая.

* Адрес: СССР, Кутаиси, ул. Ленинградская 62.

[1] см. равенства (2.2), (2.3), (2.7), (2.8), (2.11), (2.12) статьи [5].

1. *Общековариантные волновые уравнения*

Рассмотрим 4-мерное псевдориманово пространство R_4 с сигнатурой $(+++-)$. Введем в нем произвольные криволинейные координаты x^ϱ. Введем также четыре векторных поля $\lambda^\varrho_{i|}(x)$ (i — номер вектора, $i = 1, 2, 3, 4$), нормированных и взаимно ортогональных в каждой точке. Таким образом векторы $\lambda^\varrho_{i|}(x)$ образуют в каждой точке ортонормированный репер.

В пространстве R_4 относительно репера $\lambda^\varrho_{i|}(x)$ можно задать общековариантные волновые уравнения, описывающие частицы с произвольным спином:

$$\dot{s}\nabla_{\dot{u}_1 r_1}\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} = i\varkappa\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} \tag{1}$$

$$s\nabla^{r_1\dot{u}_1}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} = i\varkappa\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} \tag{2}$$

Здесь φ и χ — спиноры ранга $a+b-1$, симметрические относительно своих непунктирных индексов, $\dot{s}$ и s обозначают симметризующие операторы, введенные Гардингом [8]. Операторы $\nabla_{\dot{u}_1 r_1}$ и $\nabla^{r_1\dot{u}_1}$ имеют следующий вид

$$\nabla_{\dot{u}_1 r_1} = \sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1}\nabla_l;\ \nabla^{r_1\dot{u}_1} = \sigma^{l:r_1\dot{u}_1}\nabla_l \tag{3}$$

где ∇_l — оператор ковариантного дифференцирования вдоль реперного вектора $\lambda^\varrho_{l|}(x)$. Величины $\sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1}$ и $\sigma^{l:r_1\dot{u}_1}$ известным образом связаны с матрицами Паули.

Для ковариантных производных спиноров φ и χ имеем следующие выражения [9]

$$\nabla_l\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} = \partial_l\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} - \frac{1}{2}\gamma_{ikl}(S^{ik}_\varphi)^{r_1\ldots r_a\dot{u}'_2\ldots\dot{u}'_b}_{r'_1\ldots r'_a\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b}\varphi^{r'_1\ldots r'_a}_{\dot{u}'_2\ldots\dot{u}'_b} \tag{4}$$

$$\nabla_l\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} = \partial_l\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} - \frac{1}{2}\gamma_{ikl}(S^{ik}_\chi)^{r_2\ldots r_a\dot{u}'_1\ldots\dot{u}'_b}_{r'_2\ldots r'_a\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b}\chi^{r'_2\ldots r'_a}_{\dot{u}'_1\ldots\dot{u}'_b} \tag{5}$$

Здесь ∂_l обозначает оператор частного дифференцирования вдоль реперного вектора $\lambda^\varrho_{l|}(x)$. Матрицы S^{ik}_φ и S^{ik}_χ являются инфинитезимальными операторами представлений группы Лоренца в пространствах спиноров φ и χ. Величины γ_{ikl} являются коэффициентами вращения Риччи

$$\gamma_{ikl} = \lambda_{i|\varrho;\sigma}\lambda^\varrho_{k|}\lambda^\sigma_{l|} \tag{6}$$

где $\lambda_{i|\varrho;\sigma}$ — ковариантная производная вектора $\lambda_{i|\varrho}$ по x^σ.

2. *Явный вид инфинитезимальных операторов*

Пространства спиноров $\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b}$ и $\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b}$ являются кронекеровыми произведениями пространств непунктирных и пунктирных спиноров первого ранга $\psi^r(r=1, 2)$ и $\psi_{\dot{u}}(\dot{u} = \dot{1}, \dot{2})$. Инфинитезимальные операторы представлений группы Лоренца в этих последних пространствах обозначим соответственно через $(s^{ik})^{r}_{r'}$ и $(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'}_{\dot{u}}$. Очевидно, что

$$(S^{ik}_{\varphi})^{r_1\dots r_a\dot{u}'_2\dots\dot{u}'_b}_{r'_1\dots r'_a\dot{u}_2\dots\dot{u}_b} = (s^{ik})^{r_1}_{r'_1}\delta^{r_2}_{r'_2}\dots\delta^{r_a}_{r'_a}\delta^{\dot{u}'_2}_{\dot{u}_2}\dots\delta^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b}+\dots+$$

$$+\delta^{r_1}_{r'_1}\dots\delta^{r_{a-1}}_{r'_{a-1}}(s^{ik})^{r_a}_{r'_a}\delta^{\dot{u}'_2}_{\dot{u}_2}\dots\delta^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b}+\delta^{r_1}_{r'_1}\dots\delta^{r_a}_{r'_a}(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'_2}_{\dot{u}_2}\delta^{\dot{u}'_3}_{\dot{u}_3}\dots\delta^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b}+$$

$$+\dots+\delta^{r_1}_{r'_1}\dots\delta^{r_a}_{r'_a}\delta^{\dot{u}'_2}_{\dot{u}_3}\dots\delta^{\dot{u}'_{b-1}}_{\dot{u}_{b-1}}(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b} \tag{7}$$

Аналогично записывается инфинитезимальный оператор S^{ik}_{χ}.

Для расчетов необходимо выразить операторы s^{ik} и $\dot{s}^{ik}$ через величины $\sigma^{i:}_{\dot{u}t}$ и $\sigma^{i:t\dot{u}}$. С этой целью воспользуемся следующим выражением инфинитезимальных матриц представления группы Лоренца в пространстве биспиноров первого ранга

$$S^{ik} = \frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^k-\gamma^k\gamma^i) \tag{8}$$

Здесь γ^i являются матрицами Дирака. Выразив эти матрицы с помощью матриц Паули, из (8) легко убедиться, что

$$(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'}_{\dot{u}} = -\frac{1}{4}(\sigma^{i:}_{\dot{u}t}\sigma^{k:t\dot{u}'}-\sigma^{k:}_{\dot{u}t}\sigma^{i:t\dot{u}'}) \tag{9}$$

$$(s^{ik})^{r}_{r'} = -\frac{1}{.4}(\sigma^{i:r\dot{t}}\sigma^{k:}_{\dot{t}r'}-\sigma^{k:r\dot{t}}\sigma^{i:}_{\dot{t}r'}) \tag{10}$$

3. *Конформные преодразования ковариантных производных спиноров*

Найдем теперь конформные образы ковариантных производных (4) и (5). Естественно предположить, что

$$\check{\sigma}^{i:}_{\dot{u}t} = \sigma^{i:}_{\dot{u}t}; \qquad \check{\sigma}^{i:r\dot{t}} = \sigma^{i:r\dot{t}} \tag{11}$$

Далее в соответствии с равенствами

$$g_{\varrho\sigma} = \eta^{ik}\lambda_{i|\varrho}\lambda_{k|\sigma}; \qquad g^{\varrho\sigma} = \eta^{ik}\lambda^{\varrho}_{i|}\lambda^{\sigma}_{k|}$$

$$\check{g}_{\varrho\sigma} = e^{2q(x)}\,g_{\varrho\sigma}; \qquad \check{g}^{\varrho\sigma} = e^{-2q(x)}g^{\varrho\sigma} \tag{12}$$

можно принять, что

$$\check{\lambda}_{i|\varrho} = e^{q(x)}\lambda_{i|\varrho};\ \check{\lambda}^{\varrho}_{i|} = e^{-q(x)}\lambda^{\varrho}_{i|} \tag{13}$$

В (12) $\eta^{ik}=0$ при $i \neq k \cdot \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1;\ \eta^{44} = -1$. Мы считаем, что точки пространств R_4 и $\check{R}_4$, находящиеся в конформном соответствии, имеют одинаковые координаты. Известно, что

$$\check{\Gamma}^{\tau}_{\varrho\sigma} = \Gamma^{\tau}_{\varrho\sigma}+\delta^{\tau}_{\varrho}q_{\sigma}+\delta^{\tau}_{\varrho}q_{\sigma}-g_{\varrho\sigma}q^{\tau}, \tag{14}$$

где

$$q_\sigma \equiv \partial q/\partial x^\sigma;\ q^\tau = g^{\tau\sigma} q_\sigma \tag{15}$$

С помощью соотношений (13) и (14) легко находим конформные образы коэффициентов вращения Риччи

$$\check{\gamma}_{ikl} = (\gamma_{ikl} - \eta_{il} q_\varrho \lambda_{k|}^{\varrho} + \eta_{kl} q_\varrho \lambda_{i|}^{\varrho}) e^{-q}, \tag{16}$$

где $||\eta_{il}||$ является обратной матрицей по отношению к матрице $||\eta^{il}||$.

Далее находим закон преобразования коэффициентов связности Γ_l спинора произвольного ранга

$$\check{\Gamma}_l = \frac{1}{2} \check{S}^{ik} \check{\gamma}_{ikl} = e^{-q}(\Gamma_l - S^{ik} \eta_{il} \lambda_{k|}{}^{\varrho} q_\varrho) \tag{17}$$

Предположим теперь, что

$$\check{\varphi}^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} = e^{c_1 q} \varphi^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b}\ ;\ \check{\chi}^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} = e^{c_2 q} \chi^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} \tag{18}$$

С помощью (4), (5), (17) и (18) находим, что левые стороны уравнений (1), (2) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} s \check{\nabla}_{\dot{u}_1 r_1} \check{\varphi}^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} &= e^{(c_1 - 1) q} \Big\{ \nabla_{\dot{u}_1 r_1} \varphi^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} + \\ &+ \sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1} \Big[q_l c_1 \varphi^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} + q_k \eta_{il} \Big((s^{ik})^{r_1}_{r_1'} \varphi^{r_1' r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} + \ldots + \\ &+ (s^{ik})^{r_a}_{r_a'} \varphi^{r_1 \ldots r_{a-1} r_a'}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} + (s^{ik})^{\dot{u}_2'}_{\dot{u}_2} \varphi^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2' \dot{u}_3 \ldots \dot{u}_b} + \ldots + (s^{ik})^{\dot{u}_b'}_{\dot{u}_b} \varphi^{r_1 \ldots r_a}_{\dot{u}_2 \ldots \dot{u}_{b-1} \dot{u}_b'} \Big) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} s \check{\nabla}^{r_1 \dot{u}_1} \check{\chi}^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} &= e^{(c_2 - 1) q} \Big\{ \nabla^{r_1 \dot{u}_1} \chi^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} + \\ &+ \sigma^{l: r_1 \dot{u}_1} \Big[q_l c_2 \chi^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} + q_k \eta_{il} \Big((s^{ik})^{r_2}_{r_2'} \chi^{r_2' r_3 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} + \ldots + \\ &+ (s^{ik})^{r_a}_{r_a'} \chi^{r_2 \ldots r_{a-1} r_a'}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_b} + (s^{ik})^{\dot{u}_1'}_{\dot{u}_1} \chi^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1' \dot{u}_2 \ldots \dot{u}_b} + \ldots + (s^{ik})^{\dot{u}_b'}_{\dot{u}_b} \chi^{r_2 \ldots r_a}_{\dot{u}_1 \ldots \dot{u}_{b-1} \dot{u}_b'} \Big) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{20}$$

Для конформной инвариантности уравнений (1), (2) необходимо, чтобы в равенствах (19) и (20) члены, содержащие квадратные скобки, были равны нулю. Для того, чтобы узнать, когда это имеет место, следует воспользоваться следующими соотношениями (эти соотношения доказываются с помощью простых расчетов, которых мы не приводим):

$$\eta_{il} \sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1} (s^{ik})^{r_1}_{r_1} = \frac{3}{2} \sigma^{k:}_{\dot{u}_1 r_1}, \tag{21}$$

$$\eta_{il}\sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1}(s^{ik})^{r_a}_{r'_a}\varphi^{r_1\ldots r_{a-1}r'_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} = \frac{1}{2}\,\sigma^{k:}_{\dot{u}_1 r_1}\varphi^{r'_1 r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} \tag{22}$$

$$\dot{s}\,\eta_{il}\sigma^{l:}_{\dot{u}_1 r_1}(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b}\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_{b-1}\dot{u}'_b} = -\,\frac{1}{2}\,\dot{s}\sigma^{k:}_{\dot{u}_1 r_1}\,\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} \tag{23}$$

$$s\eta_{il}\eta^{l:\,r_1\dot{u}_1}(s^{ik})^{r_a}_{r'_a}\chi^{r_2\ldots r_{a-1}r'_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} = -\,\frac{1}{2}\,s\sigma^{k:\,r_1\dot{u}_1}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} \tag{24}$$

$$\eta_{il}\sigma^{l:\,r_1\dot{u}_1}(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'_1}_{\dot{u}_1} = \frac{3}{2}\,\sigma^{k:\,r_1\dot{u}'_1} \tag{25}$$

$$\eta_{il}\sigma^{l:\,r_1\dot{u}_1}(\dot{s}^{ik})^{\dot{u}'_b}_{\dot{u}_b}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_{b-1}\dot{u}'_b} = \frac{1}{2}\,\sigma^{k:\,r_1\dot{u}_1}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} \tag{26}$$

С помощью этих соотношений легко убедиться, что для того, чтобы в равенствах (19) и (20) члены, содержащие квадратные скобки, были равны нулю, необходимо выполнение условий

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,(a-b) \\ c_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,(a-b) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Эти условия определяют закон преобразования волновой функции при конформном преобразовании пространства-времени. В частном случае спина $\frac{1}{2}$ ($a = b = 1$) он совпадает с соответствующим законом преобразования волновой функции, который был найден в работе Паули [4].

4. *Конформная инвариантность волновых уравнений*

Примем, что при преобразовании пространства-времени величина $\varkappa$, фигурирующая в уравнениях (1), (2) преобразуется следующим образом

$$\check{\varkappa} = e^{cq}\varkappa \tag{28}$$

Физический смысл этого преобразования выяснен в работах [10, 11].

Из (19), (20) и (28) следует, что для конформной инвариантности уравнений (1) и (2) необходимо выполнение следующих условий

$$\left.\begin{aligned} c_1 - 1 &= c + c_2 \\ c_2 - 1 &= c + c_1 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Отсюда имеем

$$c = -1; \qquad c_1 = c_2 \tag{30}$$

Используя (27), из (30) получаем

$$a = b \tag{31}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXXV (1969) Fasc. 3

Уравнения, для которых выполняется это условие, описывают частицы с полуцелым спином. Однако среди уравнений (1) и (2) имеются и такие, которые описывают частицы с полуцелым спином и для которых условие (31) не выполняется. Эти уравнения конформно не инвариантны.

Также конформно не инвариантны те уравнения типа (1) и (2), которые описывают частицы с целым спином. Этот результат совпадает с результатом Бухдала [5], несмотря на то, что найденные нами правила преобразования волновых функций существенно отличаются от соответсвующих правил, полученных Бухдалом. Между тем, в работе автора [7] была доказана конформная инвариантность волновых уравнений векторного мезонного поля, записанных в общековариантной тензорной форме как в произвольных криволинейных координатах, так и относительно ортогонального репера.

Для выяснения причины этого противоречия следует проследить вывод спинорных волновых уравнений векторного мезонного поля из соответствующих тензорных уравнений. При этом необходимо заботиться о том, чтобы преобразования не нарушали конформную инвариантность уравнений. Таким путем получаем следующие конформно инвариантные уравнения

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}\nabla_{\dot{u}_1 r}\varphi^{r}_{\dot{u}_2} &= i\varkappa\chi_{\dot{u}_1\dot{u}_2} \\ \nabla^{r\dot{u}_1}(\varkappa\chi_{\dot{u}_1\dot{u}_2}) &= i\varkappa\varphi^{r}_{\dot{u}_2} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Сокращением на $\varkappa$ из (32) получаем уравнения типа (1) и (2). И этим конформная инвариантность нарушается. Однако такое сокращение недопустимо, так как ввиду равенства (28), множитель $\varkappa$ нельзя выносить за знак ковариантной производной.

Этот пример показывает, что для того, чтобы уравнения, описывающие частицы с произвольным спином, были конформно инвариантными, их можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}\nabla_{\dot{u}_1 r_1}(\varkappa^{d_1}\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b}) &= i\varkappa^{d_1+1}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b} \\ s\nabla^{r_1\dot{u}_1}(\varkappa^{d_2}\chi^{r_2\ldots r_a}_{\dot{u}_1\ldots\dot{u}_b}) &= i\varkappa^{d_2+1}\varphi^{r_1\ldots r_a}_{\dot{u}_2\ldots\dot{u}_b} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

При этом условия (30) остаются в силе, а вместо равенств (27) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(a-b) - cd_1 \\ c_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(a-b) - cd_2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Из (30) и (34) получаем условие, связывающее между собой d_1 и d_2

$$d_1 - d_2 = a - b \tag{35}$$

Выполнение этого условия обеспечивает конформную инвариантность уравнений (33).

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXXV (1969) Fasc. 3

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, *Ann. Math.*, **37**, 429 (1936).
[2] H. J. Bhabha, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (GB), **32**, 622 (1936).
[3] J. A. McLennan, *Nuovo Cimento*, **5**, 640 (1957).
[4] W. Pauli, *Helv. Phys. Acta*, **13**, 204 (1940).
[5] H. A. Buchdahl, *Nuovo Cimento*, **11**, 496 (1959).
[6] T. Fulton, F. Rohrlich, L. Witten, *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 442 (1962).
[7] Я. М. Чиквашвили, *Тезисы докл. 2-и совст. конф. по гравит.*, Тбилиси 1965.
[8] L. Garding, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (GB), **41**, 49 (1945).
[9] J. M. Czikwaszwili, *Acta Phys. Polon.*, **26**, 1027 (1964).
[10] T. Fulton, F. Rohrlich. L. Witten, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **6**, 346 1961.
[11] T. Fulton, F. Rohrlich, L. Witten, *Nuovo Cimento*, **26**, 452 (1962).

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. XXXV (1969) Fasc. 3