Neue Mechanik materieller Systeme

Nowa mechanika systemów materialnych

Von MYRON MATHISSON, Warschau

(Eingegangen am 8. September 1937)

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Ausserhalb der Materie gelten die Feldgleichungen (= elektromagnetische und Gravitationsgleichungen) *der leeren Welt.* Diese Forderung fassen wir in die Form einer *Variationsgleichung* (§§ 1,2). Dabei lösen wir das materielle System in eine Summe von *Multipolen* auf. Im Falle der Gravitationsgleichungen wird man auf diese Weise auf den Begriff des Gravitationsskeletts geführt (§ 2). Im Gravitationsskelett ist der Pol für die Masse verantwortlich, der Dipol und der Quadrupol für den Drehimpuls (§§ 2, 3, 4, 5). Diese Zuordnung ergibt sich auf verschiedene Weisen, indem wir dem materiellen System bald eine aktive Rolle zuweisen (feld*erzeugende* Massen), bald eine passive (durch äusseres Feld angegriffene Massen). Nach Entwicklung einer Behandlungsmethode für unsere Variationsgleichung, gewinnen wir aus ihr die dynamischen Gesetze, welchen die Bestimmungsstücke unseres Gravitationsskeletts gehorchen müssen. So gelangen wir zwangsläufig zu mechanischen Gleichungen, die, im Vergleich mit den klassischen, neue Glieder enthalten. Neben Gliedern, die nur in äusseren Gravitationsfeldern zur Geltung kommen, erhalten wir ein neues Glied von grösster physikalischer Bedeutung, das an äussere Gravitationsfelder nicht gebunden ist.

Bei der Behandlung des Bewegungsproblems zeigt sich, dass der Drehimpuls als antisymmetrischer Tensor eingeführt werden muss. Der Begriff „Rotationsachse eines starren Körpers" wird nachträglich aus dem Drehimpuls konstruiert (§ 4). Bewegung des Schwerpunkts und Rotation sind miteinander gekoppelt. Der FOKKERsche Ansatz für die Bewegung der Achse eines symmetrischen Kreisels ist unhaltbar (§ 4). Will man das Gravitationsskelett zum vollständigen Gegenstück des klassischen dynamischen Modells eines Körpers ausbilden, so muss man neben dem Dipol einen Quadrupol einführen (§ 5). Die daraus entspringenden Gleichungen enthalten, als Sonderfall, die Präzessionsgleichungen, ein Umstand, der eine Verifikation unserer Ansätze gestattet. (§ 5, Ende). Berücksichtigung des Dipolglieds allein würde in einer Beschränkung auf den Fall der Trägheits*kugel* ihr klassisches Analogon finden.

Die neuen mechanischen Gleichungen lassen einen *Energiesatz* zu. Doch kommt eine neue Art Energie hinzu, *die Beschleunigungsenergie* (§ 6, Ende).

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

§ 1. Feldgesetze und Beharrungsgesetze

Am Beispiel der MAXWELL-EINSTEINschen Feldgleichungen wollen wir einige fundamentale Überlegungen durchführen. Unter Einführung des Potentialvektors φ_α, lässt sich das Gleichungssystem der Elektrodynamik in einer RIEMANNschen Welt zurückführen auf die 4 Gleichungen zweiter Ordnung

$$L_\alpha(\varphi_{\dot\beta}) \equiv \Box\, \varphi_\alpha - K_\alpha^{\nu}\, \varphi_\nu = S_\alpha \qquad (\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu) \tag{1.1}$$

(β ist kein Tensorindex und bedeutet einfach, dass die Operation sich auf einen *Vektor* bezieht) und eine Gleichung erster Ordnung

$$\nabla_\nu\varphi^\nu = 0. \tag{1.2}$$

Die Gleichungen (1.1) sind für Weltstellen gültig, wo es Ladungen gibt; sonst wäre der Stromvektor S_α auf der rechten Seite gleich Null zu setzen (∇_α bedeutet kovariante Differentiation, mit K wollen wir die Krümmungsgrössen bezeichnen). Die Spaltung des Gleichungssystems in ein System (1.1) und eine überzählige Gleichung (1.2) ist, wie man weiss, an keine Einschränkung der Allgemeinheit gebunden und immer erreichbar durch Hinzufügung zu den Potentialen φ_α eines geeigneten Gradienten.

Für den linearen Operator L_α gelten die identischen (d. h., für zwei beliebige Vektorfelder p_α, φ_α gültigen) ***Reziprozitätsbeziehungen:***

$$\left.\begin{aligned} p^\alpha L_\alpha(\varphi_\beta) - \varphi^\alpha L_\alpha(p_\beta) &= \nabla_\alpha w^\alpha, \text{ wobei} \\ w_\alpha &= p^\nu\nabla_\alpha\varphi_\nu - \varphi^\nu\nabla_\alpha p_\nu\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Genügt p_α, als Potentialvektor aufgefasst, den MAXWELL-EINSTEINschen Gleichungen

$$\nabla_\nu f_{\alpha}^{\cdot\,\nu} = 0, \;\; f_{\alpha\beta} = \nabla_\beta p_\alpha - \nabla_\alpha p_\beta,$$

so hängt $L_\alpha(p_\beta)$ nur von $\nabla_\nu p^\nu$ ab. [Denn es ist $L_\alpha(p_\beta) = 0$ mit den MAXWELL-EINSTEINschen Gleichungen identisch, wenn die Normierung $\nabla_\nu p^\nu = 0$ erfüllt ist.] Es wird daher $L_\alpha(p_\beta)$ für den Gradientenvektor eines Skalarfeldes ξ,

$$p_\alpha = \nabla_\alpha\xi\,, \tag{1.4}$$

nur von $\nabla_\nu p^\nu$, d. h., von $\Box\,\xi$, abhängen. Wir haben in der Tat

$$L_\alpha(\nabla_\beta\xi) = \Box\nabla_\alpha\xi - K_\alpha^{\nu}\,\nabla_\nu\xi.$$

Infolge der Beziehung

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi_\lambda - \nabla_\beta \nabla_\alpha \varphi_\lambda = K^{\,\nu}_{\lambda\,\beta\,\alpha}\,\varphi_\nu, \tag{1.5}$$

haben wir

$$\Box \nabla_\alpha \xi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\alpha \nabla_\nu \xi = \nabla_\alpha \Box \xi + K^{\,\nu}_{\alpha} \nabla_\nu \xi$$

und daher

$$L_\alpha (\nabla_\beta \xi) = \nabla_\alpha q, \qquad q = \Box \xi. \tag{1.6}$$

Das stetige Skalarfeld ξ sei so gewählt, dass es ausserhalb eines Weltgebiets τ_4 verschwindet. Es verschwindet dort auch das Feld $q = \Box \xi$ (Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von ξ seien immer in nötigem Masse vorausgesetzt). Nimmt man an, dass im Gebiet τ_4 die Potentiale φ_α und ihre erste Ableitungen stetig sind, so ergibt sich aus (1.3), indem man die Skalardichte

$$\sqrt{g}\, \nabla_\nu u^\nu = \frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu}$$

über τ_4 integriert und die Gleichungen (1.1), (1.6) berücksichtigt:

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^\alpha S_\alpha \, d\tau_4 - \int_{\tau_4} \sqrt{g}\, \varphi^\alpha \nabla_\alpha q \, d\tau_4 = 0.$$

Durch partielle Integration und Anwendung des GAUSSschen Satzes auf den Fall eines Feldes, das an der Begrenzungsfläche verschwindet, erhält man, indem man die Normierung (1.2) einführt:

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, \varphi^\alpha \nabla_\alpha q \, d\tau_4 = 0.$$

Es ist daher

$$\int_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^\alpha S_\alpha \, d\tau_4 = 0. \tag{1.7}$$

Nun nehmen wir an, dass der Strom S_α eine zeitartige Weltröhre ausfüllt, ausserhalb der Röhre sollen die Stromkomponenten verschwinden. Wir nennen eine Röhre zeitartig, wenn ihre Begrenzungsfläche durch zeitartige Weltlinien erzeugt werden kann. Wir wählen eine innerhalb der Weltröhre laufende zeitartige Weltlinie als Röhrenachse. σ_3 sei ein 3-dimensionaler Querschnitt der Röhre. Er schneidet die Röhrenachse in einem Punkte P. Die in (1.7) vorkommende Integration werden wir so ausführen, dass wir zuerst über die Schicht zwischen 2 benachbarten σ_3 integrieren (ihr Abstand ist ds die Weltlinie entlang), das Resultat als Funktion der von einem festen Punkte P_0 der Röhrenachse gezählten Bogenlänge $s = P_0P$ betrachten und endlich über S integrieren. Das Feld p_α, in welches die Röhre eingetaucht ist, entwickeln wir in eine TAYLORreihe für jeden Querschnitt σ_3 mit dem jeweiligen Punkt P von σ_3 als Nullpunkt. Wir nehmen an, dass die Entwicklung für alle Punkte des Querschnitts, die innerhalb der Röhre liegen, gültig bleibt,

$$p_\alpha = (p_\alpha)_0 + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu_0} (x^\mu - x^\mu_0) + \dots, \tag{1.8}$$

und dass beim Integrieren die Funktion p^α durch ihre Entwicklung (1.8) ersetzbar ist. (Die Koeffizienten der Entwicklung sind Funktionen von s allein.) Dann bekommt das Integral in (1.7) die Gestalt

$$\int\limits_S \left[(p_\alpha)_0 E^\alpha + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu_0} E^{\mu\alpha} + \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial x^\mu_0 \, \partial x^\nu_0} E^{\mu\nu\alpha} + \dots \right] ds.$$

(Über gleiche Indizes wird summiert.)

Man kann es immer auf eine invariante Form bringen, indem man die Ableitungen zu kovarianten Ableitungen ergänzt. Gleichung (1.7) bekommt dann die Gestalt

$$\int\limits_S [p_\alpha e^\alpha + (\nabla_\mu p_\alpha) e^{\mu\alpha} + (\nabla_\mu \nabla_\nu p_\alpha) e^{\mu\nu\alpha} + \dots] \, ds = 0, \tag{1.9}$$

$$(p_\alpha = \nabla_\alpha \xi).$$

Die $e^{\cdots}$ sind Tensorkomponenten, Funktionen von s. Für die p_α und ihre Ableitungen sind in (1.9) ihre Werte längs der Integrationskurve zu nehmen.

Das Glied in der Summe (1.9), das p_α enthält, entspricht einem einfachen Pol, der bei Berechnung der Potentiale ein Glied vom Typus $\frac{E}{r}$ ergeben würde, der Entwicklungsabschnitt, der aus Gliedern mit p_α und $\nabla_\mu p_\alpha$ besteht, entspricht einer Pol- und einer Dipolsingularität, der dreigliedrige Entwicklungsabschnitt entspricht einem Pol, einem Dipol und einem Quadrupol, usf. Näheres darüber s. am Ende von § 2.

Die Gleichung (1.9) ist nicht an die Annahme gebunden, dass (1.1) bis ins Innere der Materie ihre Gültigkeit behalten. Gelten sie (mit absoluter oder ausreichender Genauigkeit) in einer Umgebung der Materieröhre, so setzen wir die bezüglichen Potentiale rein fiktiv ins Röhreninnere glatt fort *(die WEYLschen virtuellen Ausfüllungen)* und bilden die Grössen

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$f_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \varphi_\alpha - \nabla_\alpha \varphi_\beta,$$

$$S_\alpha = \nabla_\beta f_{.\alpha}^{\cdot\beta} \qquad (\nabla_\alpha S^\alpha \equiv 0).$$

Genügen im Innern der Röhre die φ_α nicht der Bedingung (1.2), so erzielen wir (1.2) durch Hinzufügung eines passenden Gradienten.

Das Skalarfeld ξ ist (von Voraussetzungen über Stetigkeit und Differentiierbarkeit abgesehen) nur an die Bedingung gebunden, dass es ausserhalb eines beliebig zu wählenden Gebiets τ_4 verschwindet. In (1.9) liegt demnach eine eigenartige Variationsgleichung vor; ξ ist das variierbare Element. Setzen wir voraus, dass unser physikalisches Gebilde durch den einfachen Pol genügend charakterisiert wird *(Punktladung)*, so haben wir die Gleichung

$$\int\limits_S \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} e^\alpha \, ds = 0. \tag{1.10}$$

Wir behandeln sie nach folgender Methode. In jedem Punkte der Weltlinie *spalten wir e^α nach dem Geschwindigkeitsvektor u^α*,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \qquad (u^\alpha u_\alpha) = 1,$$

d. h., wir zerlegen e^α in der Richtung von u^α und in einer zu u^α orthogonalen Richtung:

$$e^\alpha = E u^\alpha + {}^*e^\alpha, \qquad {}^*e^\nu u_\nu = 0.$$

Die Grösse ξ verschwindet an den Enden des Integrationsweges. Es ist daher

$$\int\limits_S \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} u^\alpha \, ds = 0.$$

(1.10) kann man demnach wie folgt schreiben:

$$-\int\limits_S \xi \frac{dE}{ds} ds + \int\limits_S {}^*e^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} ds = 0. \tag{1.11}$$

Es ergibt sich daraus das Verschwinden von ${}^*e^\alpha$. Spaltet man nämlich $\nabla^\alpha \xi = g^{\alpha\nu} \dfrac{\partial \xi}{\partial x^\nu}$ nach u^α (in jedem Punkte der Weltlinie), so ist nur die zu u^α normale Komponente von $\nabla^\alpha \xi$ für ${}^*e^\alpha \dfrac{\partial \xi}{\partial x^\alpha}$ von Bedeutung, diese kann aber ***unabhängig von ξ den Integrationsweg entlang variiert werden.*** [Man kann ein Feld ξ derart konstruieren, dass in jedem Punkte der Weltlinie der Wert von ξ sowie die 3 Grössen $\underset{i}{C}^{\alpha} \nabla_{\alpha} \xi$ in 3 von u^{α} und voneinander unabhängigen Richtungen $\underset{i}{C}^{\alpha}$ $(i = 1, 2, 3)$ vorgeschrieben sind und dergleichen für die höheren Ableitungen, — mit der Einschränkung, dass die gewählten Werte den Voraussetzungen über Stetigkeit und Differentiierbarkeit entsprechen und an den Enden eines Weltlinienbogens verschwinden. Es verschwindet demnach auch das erste Integral in (1.11). Dies ist aber nur dann mit der Variierbarkeit von ξ längs der Weltlinie verträglich, wenn die Bedingung

$$\dot{E} \equiv \frac{dE}{ds} = 0, \qquad E = \text{const.} \tag{1.12}$$

erfüllt ist.]

Gleichung (1.12) enthält ein Beharrungsgesetz: ein Entwicklungsgesetz für eine Grösse (die Ladung), die nur von der Zeit (der Eigenzeit) abhängt. Das Wesentliche ist, dass wir aus Feldgesetzen, die in der 4-dimensionalen Welt gelten, ein Gesetz für die eindimensionale Weltlinie ausgeschält haben.

Es gibt eine zweite Methode zur Ableitung der Beharrungsgesetze aus den Feldgesetzen. Man löst die Gleichungen (1.1) und setzt die gefundenen Potentiale in die Normierungsgleichung (1.2) ein. Die Divergenz $\nabla_{\nu} \varphi^{\nu}$ soll identisch verschwinden; identisch, d. h. unabhängig von den Koordinaten des Punktes $O(x_0) \equiv O(x_0^0, x_0^4, x_0^2, x_0^3)$, für welchen wir die φ_{α} bestimmt haben. Diesen Punkt können wir innerhalb eines 4-dimensionalen Bereiches frei wählen, was der Variierbarkeit von ξ analog ist. Um alle zugänglichen Schlüsse zu ziehen, genügt es, den Punkt $O(x_0)$ innerhalb eines sehr kleinen 4-dimensionalen Gebiets frei wählen zu können. Dieser Umstand bestätigt eine frühere Einsicht, dass wir Gleichungen und Betrachtungsmethoden verwenden können, die nur in gewisser nicht zu kleiner Entfernung von der Materie hinreichend genau sind.

§ 2. *Die Variationsgleichung der Mechanik*

Gehen wir zu unserem Hauptproblem, der Ableitung der Bewegungsgleichungen, über, so bilden die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen die Grundlage. Von diesen Feldgleichungen aus sollen die Beharrungsgesetze gewonnen werden. Die Gravitationsgleichungen sind aber in den Gravitationspotentialen nicht linear. Wir werden sie durch angenährte lineare Gleichungen ersetzen. Es sei nämlich möglich, die Komponenten des Masstensors für alle Punkte eines Weltbereiches als eine Summe $g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$ darzustellen, wobei die $\gamma_{\alpha\beta}$ als klein angenommen werden und $g_{\alpha\beta}$ den Masstensor eines gewissen RIEMANNschen Weltbereichs W darstellt. Die metrische Mannigfaltigkeit W werden wir den *Untergrund* nennen und $\gamma_{\alpha\beta}$ als ein Tensorfeld *in* W betrachten. Kovariante Ableitungen, Herauf - und Herunterziehen der Indizes—alles wollen wir auf die Metrik des Untergrundes beziehen. Der Untergrund soll ein mögliches Weltstück darstellen, im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie. Die EINSTEINschen Gleichungen können wir nach den Potenzen der $\gamma_{\alpha\beta}$ entwickeln. Aus den in den $\gamma_{\alpha\beta}$ linearen Gliedern werden die gesuchten linearen Gleichungen bestehen. So gewinnen wir eine Verallgemeinerung der bekannten EINSTEINschen angenäherten Gravitationsgleichungen, in welchen die Welt der speziellen Relativitätstheorie die Rolle eines Untergrundes spielt.

Es seien $K^{\varepsilon}_{\lambda\alpha\beta}$, $K_{\lambda\mu}$, K die Krümmungsgrössen des Untergrundes. Kovariante Differentiation ist, wie gesagt, in Bezug auf die Metrik des Untergrundes zu verstehen. Der gesamte metrische Tensor mit unteren Indizes hat die Komponenten

$$g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\,.$$

Für die Komponenten mit oberen Indizes findet man leicht in erster Näherung

$$g^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}.$$

Es ist tatsächlich, bis auf Grössen zweiter Ordnung,

$$(g_{\alpha\nu} + \gamma^{\alpha\nu})(g^{\beta\nu} - \gamma^{\beta\nu}) = \delta^{\beta}_{\alpha}$$

(gleich dem gemischten Einheitstensor).

Benutzen wir ein Koordinatensystem, das in einem vorgegebenen Punkte für den Untergrund geodätisch ist, so gilt bis auf Grössen zweiter Ordnung für die vollständige Krümmungskomponente $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ der gesamten Metrik $g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$ in diesem Punkte

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = K_{\alpha\beta\lambda\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\,\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2\gamma_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\mu} - \frac{\partial^2\gamma_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta\,\partial x^\mu}\right). \quad (2.1)$$

Es gilt weiter in demselben geodätischen Koordinatensystem, für den nämlichen Punkt,

$$\nabla_\beta \nabla_\lambda \gamma_{\alpha\mu} = \frac{\partial^2\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\,\partial x^\lambda} - \gamma_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} - \gamma_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \nu\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} = K^{\nu}_{\lambda\beta\alpha};$$

die Dreiindizessymbole beziehen sich auf den Untergrund. Die Krümmung $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ lässt sich nun in dem ins Auge gefassten Punkte folgendermassen darstellen:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = K_{\alpha\beta\lambda\mu} + \frac{1}{2}\left(\nabla_\beta\nabla_\lambda\gamma_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\nabla_\alpha\gamma_{\beta\lambda} - \nabla_\alpha\nabla_\lambda\gamma_{\beta\mu} - \nabla_\mu\nabla_\beta\gamma_{\alpha\lambda}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(K^{\nu}_{\lambda\beta\alpha}\gamma_{\nu\mu} + K^{\nu}_{\lambda\beta\mu}\gamma_{\nu\alpha} + K^{\nu}_{\lambda\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\right).$$

Wegen ihres invarianten Charakters ist diese Beziehung für jeden Punkt und für beliebiges Koordinatensystem gültig. Es sei

$$\psi^{\beta}_{\alpha} = \gamma^{\beta}_{\alpha} - \gamma\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\gamma^{\nu}_{\nu}\,.$$

Dann beträgt $R_{\beta\mu}$, d. h. $(g^{\alpha\lambda} - \gamma^{\alpha\lambda})\,R_{\alpha\beta\lambda\mu}$, bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$R_{\beta\mu} = K_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\Box\,\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{2}\left(K^{\nu}_{\beta}\gamma_{\nu\mu} + K^{\nu}_{\mu}\gamma_{\nu\beta}\right) - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu}_{\beta\alpha\mu}$$

$$(\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu)\,;$$

es wird dabei vorausgesetzt, dass die $\gamma_{\alpha\beta}$ die Bedingung

$$\nabla_\nu\psi^{\nu}_{\alpha} = 0 \tag{2.2}$$

erfüllen. R^{β}_{μ} berechnen wir als $(g^{\beta\nu} - \gamma^{\beta\nu})\,R_{\nu\mu}$:

$$R^{\beta}_{\mu} = K^{\beta}_{\mu} - \frac{1}{2}\Box\,\gamma^{\beta}_{\mu} + \frac{1}{2}(K^{\beta}_{\nu}\gamma^{\nu}_{\mu} - K^{\nu}_{\mu}\gamma^{\beta}_{\nu}) - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu\beta}_{\cdot\cdot\alpha\mu}.$$

Daraus folgt

$$R = K - \Box\,\gamma - \gamma^{\alpha}_{\nu}K^{\nu}_{\alpha}\,.$$

Es sei $L^{\mu}_{\lambda}\,(\psi_{\alpha\beta})$ ein linearer Differentialausdruck (in Bezug auf die $\psi_{\alpha\beta}$), den wir folgendermassen definieren:

$$L^{\mu}_{\lambda}\,(\psi_{\alpha\beta}) \equiv -\frac{1}{2}\Box\,\psi^{\mu}_{\lambda} + \frac{1}{2}(K^{\mu}_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda} - K^{\nu}_{\lambda}\psi^{\mu}_{\nu} + \delta^{\mu}_{\lambda}K^{\nu\varepsilon}\psi_{\nu\varepsilon}) - K^{\nu\mu}_{\cdot\cdot\varepsilon\lambda}\psi^{\varepsilon}_{\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2}(K^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\lambda}K)\,\psi^{\nu}_{\nu}\,. \tag{2.3}$$

Dann ist

$$R^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\lambda} R = K^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\lambda} K + L^{\mu}_{\lambda}\,. \tag{2.4}$$

(Durch Herunterziehen von μ ensteht aus L^{μ}_{λ} ein Tensor, der in Bezug auf λ, μ unsymmetrisch ist).

Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, dass die Normierungsgleichungen (2.2) bestehen. Ist es nämlich nicht von vornherein der Fall, so können wir setzen:

$$\psi_{\alpha\beta} = \overline{\psi}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} + \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\nabla_{\nu}\zeta^{\nu}.$$

$$\text{d. h.,}\quad \gamma_{\alpha\beta} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\zeta_{\beta} + \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha}$$

(das läuft aber auf eine infinitesimale Koordinatentransformation hinaus)—und die Bedingungen (2.2) für die neuen Potentiale $\psi_{\alpha\beta}$ realisieren, indem wir die ζ_{α} aus den Gleichungen bestimmen:

$$\Box\zeta_{\lambda} + \nabla_{\nu}\nabla_{\lambda}\zeta^{\nu} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}\zeta^{\nu} = \nabla_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda}.$$

Durch Anwendung der Formel (1.5) erhält man

$$\Box\zeta_{\lambda} + K^{\nu}_{\lambda}\,\zeta_{\nu} = \nabla_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda}\,.$$

Indem man aus diesen Gleichungen die ζ_{λ} bestimmt, kann man stets das Bestehen von (2.2) erzwingen.

Die linearen Differentialausdrücke $L^{\mu}_{\lambda}(\psi_{\alpha\beta})$ erfüllen identische Reziprozitätsbeziehungen, die den Beziehungen (1.3) ganz analog sind:

$$\left.\begin{aligned} p^{\alpha}_{\beta}\,L^{\beta}_{\alpha}(\psi_{\lambda\mu}) - \psi^{\alpha}_{\beta}\,L^{\beta}_{\alpha}(p_{\mu\nu}) &= \nabla_{\alpha}w^{\alpha},\ \text{wobei} \\ w_{\lambda} = p^{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}\psi_{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}p_{\alpha\beta};\ \ & p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}\,. \end{aligned}\right| \tag{2.5}$$

Wir wollen jetzt nach (2.3) $L^{\mu}_{\lambda}(p_{\alpha\beta})$ berechnen für

$$p_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha}\,. \tag{2.6}$$

Dazu werden wir uns einer zu (1.5) analogen Formel bedienen, die für jeden kovarianten Tensor $A_{\lambda\mu}$ gültig ist:

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}A_{\lambda\mu} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}A_{\lambda\mu} = K^{\varepsilon}_{\lambda\beta\alpha}\,A_{\varepsilon\mu} - K^{\varepsilon}_{\mu\beta\alpha}A_{\lambda\varepsilon}\,. \tag{2.7}$$

Aus der BIANCHIschen Identität

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$\nabla_\alpha K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\beta} + \nabla_\lambda K^{\varepsilon}_{\mu\beta\alpha} + \nabla_\beta K^{\varepsilon}_{\mu\alpha\lambda} = 0$$

folgt

$$\nabla_\alpha K_{\varepsilon\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \nabla_\mu K_{\lambda\varepsilon} - \nabla_\varepsilon K_{\lambda\mu}. \tag{2.8}$$

Aus (1.5) ergibt sich

$$\Box \nabla_\lambda \xi_\mu = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\nabla_\lambda \nabla_\beta \xi_\mu + K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\beta} \xi_\varepsilon)$$

und dann aus (2.7) und (2.8)

$$\Box \nabla_\lambda \xi_\mu = \nabla_\lambda \Box \xi_\mu + K^{\varepsilon}_{\lambda} \nabla_\varepsilon \xi_\mu + 2K^{\varepsilon}_{\mu\lambda\alpha} \nabla^\alpha \xi_\varepsilon +$$

$$+ \xi^{\varepsilon} (\nabla_\mu K_{\lambda\varepsilon} - \nabla_\varepsilon K_{\lambda\mu}). \tag{2.9}$$

(Wir schreiben $\nabla^\alpha \xi_\varepsilon$ anstatt $g^{\alpha\nu} \nabla_\nu \xi_\varepsilon$.) Wir führen jetzt für den Untergrund folgende Voraussetzung ein:

$$\left.\begin{aligned} & K^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^{\lambda}_{\mu} K = \alpha \delta^{\mu}_{\lambda} \qquad (\alpha = const.) \\ & \text{d. h.,}\ K = -4\alpha, \quad K^{\mu}_{\lambda} = -\alpha \delta^{\mu}_{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

(2.3) bekommt die einfache Gestalt

$$L_{\lambda\mu}(\psi_{\alpha\beta}) \equiv -\frac{1}{2} \Box \psi_{\lambda\mu}$$

(es wird also $L_{\lambda\mu} = L_{\mu\lambda}$).

Dann haben wir für das Feld (2.6) die einfache Beziehung, die wir nach (2.9) berechnen:

$$\left.\begin{aligned} & L_{\lambda\mu}(p_{\alpha\beta}) = \nabla_\lambda q_\mu + \nabla_\mu q_\lambda, \text{ mit} \\ & q_\lambda = -\frac{1}{2} (\Box \xi_\lambda - \alpha \xi_\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Der Untergrund wird im folgenden die Rolle des ***äusseren*** Gravitationsfeldes spielen, dem sich das Feld eines Körpers überlagert. Durch (2.10) werden nur solche äussere Felder zugelassen, die ***ausserhalb ungeladener Materie*** herrschen (die Konstante α vermittelt die kosmologische Erweiterung). Das ist jedenfalls eine sehr umfangreiche Klasse von Gravitationsfeldern.

Die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$(G^{\mu}_{\lambda} \equiv) R^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\lambda} R - \alpha\delta^{\mu}_{\lambda} = -\varkappa T^{\mu}_{\lambda} \tag{2.13}$$

ersetzen wir, nach (2.4) und (2.10), durch die linearen Gleichungen

$$L^{\mu}_{\lambda}\ (\psi_{\alpha\beta}) = \mu^{\mu}_{\lambda}\ \ (\mu_{\lambda\mu} = \mu_{\mu\lambda}), \tag{2.14}$$

$$\nabla_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda} = 0. \tag{2.15}$$

Indem wir das elektromagnetische Feld ausschliessen, nehmen wir an, dass μ^{μ}_{λ} ausserhalb einer zeitartigen Weltröhre verschwindet. Die Ausfüllung μ^{μ}_{λ} der Weltröhre können wir, genau nach dem Muster der vorher behandelten elektromagnetischen Gleichungen, als eine *virtuelle Ausfüllung* betrachten, die aus einer glatten Fortsetzung einer ausserhalb der Röhre vorhandenen Lösung entspringt. Als virtuelle Ausfüllung benutzen wir (einer Idee von WEYL folgend) den durch die linke Seite von (2.13) definierten Tensor G^{μ}_{λ}, in welchem wir nur Glieder erster Ordnung in den $\gamma_{\alpha\beta}$ berücksichtigen. Für den so entstehenden Tensor M^{μ}_{λ} besteht die Identität

$$\nabla_{\nu} M^{\nu}_{\lambda} \equiv 0, \tag{2.16}$$

die der bekannten Identität für den vollen Tensor G^{μ}_{λ} entspricht. (M^{μ}_{λ} unterscheidet sich von L^{μ}_{λ} durch Glieder, die gleichzeitig mit $\nabla_{\nu}\psi^{\nu}_{\lambda}$ verschwinden). Setzen wir Lösungen von $L^{\mu}_{\lambda} = 0$ glatt ins Röhreninnere fort, indem wir für sie $\mu^{\mu}_{\lambda} = M^{\mu}_{\lambda}$ konstruieren, so bekommen wir ein μ^{μ}_{λ} - Feld, das die postulierten Eigenschaften besitzt und die Gleichungen

$$\nabla_{\nu}\mu^{\nu}_{\lambda} = 0 \tag{2.17}$$

erfüllt. Das Feld ξ^{α} von (2.6) soll, seiner Rolle und seinen Eingeschaften nach, dem Skalarfeld ξ von § 1 völlig analog sein. Auch das Vektorfeld ξ^{α} soll ausserhalb eines (beliebig zu wählenden) Weltgebiets τ_4 mit einer gewissen Anzahl seiner Differentialquotienten verschwinden, sonst kann es beliebig gewählt werden. Indem man die Reziprozitätsbeziehung (2.5) mit $\sqrt{g}$ multipliziert und über τ_4 integriert, bekommt man, wegen

$$\nabla_\nu w^\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, w_\nu)}{\partial x^\nu}, \qquad \int\limits_{\tau_4} \frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu}\, d\tau_4 = 0,$$

die Gleichung

$$\int\limits_{\tau_4} \sqrt{g}\, p^{\alpha\beta} \mu^{\alpha\beta}\, d\tau_4 - 2 \int\limits_{\tau_4} \sqrt{g}\, \psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta d\tau_4 = 0.$$

Man beweist durch partielle Integration, dass das zweite Integral infolge der Normierungsgleichungen (2.2) für $\psi_{\alpha\beta}$ und des Verschwindens von q_α auf der Begrenzungsfläche verschwindet. Mithin

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\tau_4} \sqrt{g}\, p_{\alpha\beta} \mu^{\alpha\beta}\, d\tau_4 = 0 \text{ für} \\ &p_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

in voller Analogie mit (1.7). Der Übergang zu einem Integral längs einer Weltlinie geschieht ebenso wie für (1.7), und man gelangt zu einer Gleichung, die der Gleichung (1.9) entspricht:

$$\int\limits_s [p_{\alpha\beta}\; m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}) m^{\lambda\alpha\beta} + \ldots]\, ds = 0. \tag{2.19}$$

Das ist unsere *Variationsgleichung der Mechanik.*

Setzen wir voraus, dass unser physikalisches Gebilde durch den einfachen Pol genügend charakterisiert wird *(Punktmasse)*, so haben wir die Gleichung

$$\int\limits_s m^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \xi_\beta\, ds = 0. \tag{2.20}$$

In jedem Punkte der Weltlinie spalten wir $m^{\alpha\beta}$ nach dem jeweiligen Geschwindigkeitsvektor u^α, d.h., wir zerlegen es nach der Formel

$$m^{\alpha\beta} = M u^\alpha u^\beta + M^\alpha u^\beta + M^\beta u^\alpha + {}^*m^{\alpha\beta}, \text{ wobei} \tag{2.21}$$

$${}^*m^{\alpha\beta} u_\beta = 0, \qquad M^\alpha u_\alpha = 0.$$

Unter dem Integralzeichen wird es Glieder geben, in welchen Differentialquotienten von ξ_α in Richtungen, die zu u^α orthogonal sind, vorkommen. Diese Glieder fügen sich zu

$$({}^*m^{\alpha\beta} + M^\alpha u^\beta) \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2.22}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

zusammen. Es steht uns frei für $4.3 = 12$ Grössen

$$\left.\begin{array}{ll} \underset{i}{c}^{\nu} \dfrac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\nu} & (i = 1, 2, 3;\ \beta, \nu = 0, 1, 2, 3) \\ (\underset{i}{c}^{\nu} u_\nu = 0) & \end{array}\right| \tag{2.23}$$

eine Wahl zu treffen, die unabhängig von der Wahl der ξ_β längs der Weltlinie ist. Dann aber folgt aus (2.20), dass die Gliedergruppe (2.22), über s integriert, für sich allein Null ergibt. Daraus folgt aber

$$^{*}m^{\alpha\beta} + M^{\alpha} u^{\beta} = 0 \tag{2.24}$$

und durch Multiplikation mit u^α

$$^{*}m^{\alpha\beta} = 0, \qquad M^{\alpha} = 0. \tag{2.25}$$

Jetzt kann Gleichung (2.20) wie folgt geschrieben werden:

$$\int\limits_{s} M u^{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.26}$$

Es ist aber

$$M u^{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} = u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (M u^{\beta} \xi_{\beta}) - u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (M u^{\beta}) \xi_{\beta} \,. \tag{2.27}$$

Das erste Glied rechts ist einfach die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ eines Skalars. Das ξ^α - Feld verschwindet an den Endpunkten des Integrationsweges, sonst aber ist es längs der Weltlinie frei wählbar. Es folgt daher aus (2.26), (2.27):

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (M u^{\beta}) = 0 \tag{2.28}$$

oder, in entwickelter Gestalt,

$$\frac{\mathrm{d}\,(M u^{\lambda})}{\mathrm{d}\,s} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\ \beta \\ \lambda \end{matrix} \right\} M u^{\alpha} u^{\beta} = 0. \tag{2.29}$$

Indem man (2.28) mit u_β multipliziert und die Normierung $u_\beta u^\beta = 1$ berücksichtigt, erhält man noch

$$\dot{M} = \frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,s} = 0, \qquad M = const. \tag{2.30}$$

So führt Gleichung (2.20) zum Bewegungsgesetz (Beharrungsgesetz) (2.29) mit einer konstanten Masse. Es ist klar, dass (2.29) zusammen mit (2.24) und (2.25) die hinreichende Bedingung für (2.20) darstellt.

Die Gleichungen (1.9) und (2.19) haben wir aus den Gleichungen (1.7) und (2.18) abgeleitet. Diese aber sind nur dann mit der Willkür unserer Felder ξ, ξ_α verträglich, wenn zugleich die Kontinuitätsgleichungen

$$\nabla_\nu S^\nu = 0, \qquad \nabla_\nu \mu^{\lambda\nu} = 0 \tag{2.31}$$

bestehen. Da (1.7) und (2.18) unter Benutzung der Eichung (1.2) und (2.15) aus den Feldgleichungen (1.1) und (2.14) folgt, so sieht man ein, dass die Bedingungen (2.31) erfüllt sein müssen, wenn die Eichung nicht zu Widersprüchen führen soll.*

Das Gravitationsskelett. Indem wir Gleichungen (2.19) am Glied, das Differentialquotienten r-ter Ordnung von $p_{\lambda\mu}$ enthält, abbrechen, lösen wir unser materielles System in eine Summe von Multipolen auf. Wir sagen, dass wir das System durch sein *Gravitationsskelett* ersetzen.

Die Lösungen $\psi_{\alpha\beta}$ eines Systems (2.14) sind (für ein CAUCHY-Problem) entweder retardierte Potentiale (euklidische Welt als Untergrund) oder Lösungen FREDHOLMscher Integralgleichungen, in welchen das freie Glied (die gegebene Funktion) ein retardiertes Potential ist. Indem man die Funktionen μ_α^β in eine schmale zeitartige Röhre einschliesst und diese auf eine Weltlinie zusammenschrumpfen lässt, bekommt man für die retardierten Potentiale im einfachsten Fall einen einfachen Pol, d. h. einen Ausdruck vom Typus $m\,\varphi(x_0, x)$, der von einem Aufpunkt $O(x_0)$ und vom Ort $A(x)$ des Pols von der Stärke m abhängt. $O(x_0)$ und $A(x)$ gehören derselben geodätischen Nullinie, φ wird wie $\frac{1}{r}$ unendlich für $O(x_0) \to A(x)$; dabei ist r eine dem gewöhnlichen $r(x_0, x)$ analoge, invariant definierte Grösse, die für $O(x_0) \to A(x)$ gegen Null konvergiert.** Dipole (Lösungen mit Singularitäten vom Typus eines klassischen Dipols, Unendlichwerden wie $\frac{1}{r^2}$) kann man erhalten, indem man zwei Pollinien gegen eine einzige Weltlinie konvergieren lässt, u. dgl. für höhere Multipole. Die Singularitäten gehen in die Lösungen der FREDHOLMschen Gleichungen über.

Es seien nun die $\psi_{\alpha\beta}$ Lösungen von $L_{\mu\nu} = 0$, die nach (2.15) geeicht sind und beim Annähern an die Weltlinie wie $\frac{1}{r}$ unendlich werden. Die Singularitätenlinie sei dem Gebiet τ_4 durch eine schmale Röhre (einen Kanal) entzogen. Indem wir die Reziprozitätsbeziehung (2.5) über das neue kleinere Gebiet τ'_4 integrieren, erhalten wir, da in τ'_4 $L_{\mu\nu} = 0$ ist,

---

* Aus den Gleichungen (2.31) folgen unmittelbar die Gleichungen (1.7) und (2.18). Das wäre der kürzeste Weg zu unseren Variationsgleichungen (1.3) und (2.19). Ihr Zusammenhang mit den Feldpotentialen wäre dabei beiseite gelassen.

** S. die Literaturangaben am Ende der Arbeit.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$\int_{\tau'_4} \left[\frac{\partial (\sqrt{g}\, w^\nu)}{\partial x^\nu} + 2\sqrt{g}\, \psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta \right] d\,\tau_4 = 0.$$

Wegen der Eichung (2.15), ist

$$\psi^{\alpha\beta} \nabla_\alpha q_\beta = \nabla_\alpha (\psi^{\alpha\beta} q_\beta),$$

und wir haben

$$\int_{\tau'_4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g}\, w^\nu + 2\sqrt{g}\, \psi^{\nu\beta} q_\beta)\, d\tau_4 = 0\,.$$

Die linke Seite transformiert sich, nach dem GAUSSschen Satz, in ein Flächenintegral. Da die Felder $\xi_\alpha, \nabla_\alpha \xi_\beta, q_\alpha$ auf der Begrenzungsfläche von τ_4 verschwinden, kommt im Flächenintegral nur das Integral über die Röhrenfläche vor. Da die $\psi_{\alpha\beta}$ voraussetzungsgemäss wie $\frac{1}{r}$ unendlich werden, die Oberfläche eines raumartigen Querschnitts des Kanals aber beim Zusammenziehen das Kanals wie r^2 gegen Null konvergiert, verschwindet beim Zusammenschrumpfen des Kanals das Glied mit q_β und das Glied mit $\nabla_\lambda p_{\alpha\beta}$. $p_{\alpha\beta}$ kann man durch das erste Glied der TAYLOR-Entwicklung [s. (1.8)] ersetzen, da das folgende von der Ordnung r ist. Sind die $\psi_{\alpha\beta}$ von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, so können die Glieder mit $\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}$ und q_β einen für $r \to 0$ nicht verschwindenden Beitrag geben. q_β ist aber eine Linearkombination der $\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}$:

$$q_\beta = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\beta = g^{\mu\nu} \nabla_\mu p_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\beta (g^{\mu\nu} p_{\mu\nu})\,.$$

Man kann also die Gleichung (2.19) *und ebenso die Gleichung* (1.9) *begründen ohne virtuelle Ausfüllungen zu benutzen, indem man Lösungen mit Singularitätenlinien (Multipollinien) betrachtet.* Es folgt aus unseren Betrachtungen, dass die Potentiale mindenstens wie $\frac{1}{r^{n+1}}$ unendlich werden müssen, damit in (2.19) Differentialquotienten von $p_{\alpha\beta}$ von der Ordnung n vorkommen. Aus der Betrachtung eines klassischen (d. h., statischen) Multipols, für welchen eine Gleichung (1.9) oder (2.19) leicht zu berechnen ist, zieht man den Schluss, dass die Potentiale nicht *mindenstens,* sondern *gerade* wie $\frac{1}{r^{n+1}}$ unendlich werden müssen.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Indem man die Gravitationspotentiale in der Umgebung der Singularitätenlinie angibt, kann man die linke Seite von (2.19) als ein Flächenintegral oder ein Grenzwert eines Flächenintegrals berechnen,.

Die Charakterisierung des Systems durch eine Weltlinie und Gravitationspotentiale in ihrer Umgebung ist somit zugleich eine Angabe seines Gravitationsskeletts.

Ein Potential $\breve{\varphi}_\lambda = \nabla_\lambda \xi$ (ξ - ein beliebiges Skalarfeld) genügt sicherlich den MAXWELLschen Gleichungen (die wir als bereits auf Potentiale zurückgeführt voraussetzen) der leeren, stromlosen Welt, denn das entsprechende elektromagnetische Feld verschwindet identisch. Sollen die Potentiale die Eichung (1.2) erfüllen, so kann man noch das Skalarfeld ξ zwischen den Lösungen der Gleichung $\Box \xi = 0$ beliebig wählen. Es folgt daraus, dass es immer möglich ist, *physikalisch unwesentliche Multipole* hineinzuführen, indem man zu den Potentialen unwesentliche Potentiale

$$\breve{\varphi}_\lambda = \nabla_\lambda \xi, \qquad \Box \xi = 0 \tag{2.32}$$

hinzufügt, deren erzeugendes Skalarfeld ξ auf gewissen Weltlinien Multipolsingularitäten besitzt. *Doch ist Gleichung (1.9) von diesen physikalisch unwesentlichen Singularitäten unabhängig.* Wir benutzten nämlich zu ihrer Ableitung den (wahren oder virtuellen) Strom, auf welchen die Potentiale (2.31) keinen Einfluss haben *(Eichinvarianz).*

Ganz ähnliche Verhältnisse finden wir bei Betrachtung der Gravitationsgleichungen. Die Rolle der Potentiale (2.31) übernehmen nunmehr die Gravitationspotentiale

$$\breve{\gamma}_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda \tag{2.33}$$

(ξ_λ - ein beliebiges Vektorfeld), die man zu den $\gamma_{\lambda\mu}$ addieren kann. Sie erfüllen identisch die Gleichungen (2.14) für $\mu_{\lambda\mu} = 0$, wobei $\psi_{\alpha\beta}$ nach der Formel

$$\psi^\beta_\alpha = \breve{\gamma}^\beta_\alpha - \frac{1}{2} \breve{\gamma}^\nu_\nu \, \delta^\beta_\alpha$$

mit den $\breve{\gamma}_{\lambda\mu}$ zusammenhängt und ξ_λ zwischen den Lösungen der Gleichung

$$\Box \xi_\lambda + K^\nu_\lambda \xi_\nu = 0$$

zu wählen ist. [Diese Gleichung haben wir schon früher aus der Bedingung (2.2) abgeleitet.] Es können demnach durch die ξ_α physikalisch unwesentliche Multipole eingeführt werden. Aber, ebenso wie vorher in Gleichung (1.9), sind die Multipole von Gleichung (2.19) von den physikalisch unwesentlichen Singularitäten unabhängig. Das folgt unmittelbar aus der

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Struktur der von uns verwendeten virtuellen Ausfüllungen, die in Bezug auf infinitesimale Koordinatentransformationen invariant sind, durch welche die Felder (2.32), wie bekannt, erzeugt werden.

Es sei noch hervorgehoben, dass zwei verschiedene virtuelle Ausfüllungen, die aber denselben Anschluss an die Röhrenwände besitzen, zu gleichen Multipolstärken in der Gleichung (2.19) führen.

§ 3. *Die Bewegungsgleichungen eines Dipols*

Wird Gleichung (2.20) durch Dipolterme ergänzt, so hat man

$$\int\limits_{s} \left[p_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\alpha\beta} \right] ds = 0. \tag{3.1}$$

Diese Gleichung bildet, wie wir gleich sehen werden, ein in sich geschlossenes, lösbares Problem: man kann Gleichung (2.19) am Dipolterm abbrechen, ohne auf Widersprüche zu stossen. Es wird sich weiter zeigen, dass den rein deduktiv gewonnenen Resultaten eine zwingende, eindeutige Interpretation zukommt und dass physikalische Bestimmungsstücke eines materiellen *Systems,* z. B. das Rotationsmoment, in Begriffen des Gravitationsskeletts beschreibbar sind. Das Problem eines Systems in der Form eines Gravitationsskeletts anzusetzen bietet den Vorzug, dass man solchen äusserst schwierigen Fragen, wie Existenz von starren Körpern und Rotation (in einer RIEMANNschen Welt) aus dem Wege geht und sich sogleich einer Anzahl physikalisch bedeutsamer Parameter zuwendet.

Wir zerspalten $m^{\lambda\alpha\beta}$ nach u^λ, d. h., stellen es als eine Summe dar, deren erstes Glied ein zu u^α orthogonaler Tensor ist und deren übrige Glieder Produkte von u^α - Komponenten und von Komponenten zu u^α orthogonaler Tensoren sind (vgl. die Zerspaltung von $m^{\alpha\beta}$ im vorigen Paragraph). Die Zerspaltungskomponenten, die u^λ enthalten, können „wegintegriert" werden, sie sind durch partielle Integration (nach der Formel

$$\int\limits_{s} u^\lambda \nabla_\lambda Q\, ds = \int\limits_{s} \frac{dQ}{ds}\, ds = 0,$$

vorausgesetzt, dass der Skalar Q an den Enden des Integrationsweges verschwindet, was durch Vermittlung des ξ^α - Feldes geschieht) auf Einzelpolterme zurückführbar und daher in $m^{\alpha\beta}$ mit enthalten, z. B.:

$$\int\limits_{s} \nabla_\lambda p_{\alpha\beta} u^\lambda A^{\alpha\beta} ds = -\int\limits_{s} p_{\alpha\beta} (u^\lambda \nabla_\lambda A^{\alpha\beta})\, ds. \tag{3.2}$$

Wir setzen daher ($m^{\lambda\alpha\beta}$ ist in α, β symmetrisch):

$$m^{\lambda\alpha\beta} = {}^*m^{\lambda\alpha\beta} + n^{\alpha\lambda} u^{\beta} + n^{\beta\lambda} u^{\alpha} + n^{\lambda} u^{\alpha} u^{\beta}. \tag{3.3}$$

Die Tensoren ${}^*m^{\cdots}$, $n^{\cdot\cdot}$ (in allen Indizes) und der Vektor n^{λ} sind zu u^{λ} orthogonal; ${}^*m^{\lambda\alpha\beta}$ ist in α, β symmetrisch. Für zweite Ableitungen von ξ_{β} in zu u^{α} orthogonalen Richtungen, die unabhängig voneinander und von anderen ξ_{β} - Grössen wählbar sind, bekommt man zuerst für eine Summe

$$\frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial x^{\lambda}\, \partial x^{\alpha}} \left({}^*m^{\lambda\alpha\beta} + n^{\alpha\lambda} u^{\beta}\right) = 0, \tag{3.4}$$

dann für einzelne Glieder

$$\left(n^{\alpha\lambda} + n^{\lambda\alpha}\right) u^{\beta} + {}^*m^{\lambda\alpha\beta} + {}^*m^{\alpha\lambda\beta} = 0. \tag{3.5}$$

Multiplikation mit u_{β} ergibt

$$n^{\alpha\lambda} + n^{\lambda\alpha} = 0, \qquad \boxed{n^{\alpha\lambda} = -\, n^{\lambda\alpha}.} \tag{3.6}$$

Dann aber kann (3.4) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) {}^*m^{\lambda\alpha\beta} = 0.$$

In der Summe auf der linken Seite können die Faktoren von $m^{\lambda\alpha\beta}$ — nachdem im betrachteten (beliebigen) Punkte ein zu u^{α} orthogonales Raumkoordinatensystem und u^{α} als Zeitachse gewählt worden sind — beliebige in α, β symmetrische Werte annehmen. Daher

$${}^*m^{\lambda\alpha\beta} = 0. \tag{3.7}$$

Bevor wir unseres Problem deduktiv weiter verfolgen, wollen wir den physikalischen Sinn suchen, der den Bestimmungsstücken n^{λ} unseres Gravitationsskeletts zukommt. Der Untergrund sei euklidisch und auf ein orthogonales (LORENTZsches) Koordinatensystem bezogen. Es sei $T_{\alpha\beta}$ der in (2.13) vorkommende Tensor der materiellen Ausfüllung einer zeitartigen Weltröhre. Er wird die Rolle von $\mu_{\alpha\beta}$ [Gleichung (2.14)] übernehmen. Innerhalb der Weltröhre wählen wir eine glatte zeitartige Weltlinie und zerschneiden die Röhre in Elemente (Schichten), indem wir in Abständen ds dreidimensionale parallele Ebenen σ_3 konstruieren, die zur Weltlinie orthogonal sind. Wir haben in allen Punkten der Weltlinie

$$\left.\begin{aligned} &u^0 = 1, \qquad u^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,; \\ &n^0 = 0 \ (\text{wegen } n^\lambda u_\lambda = 0),\ n^{0i} = 0 \ (\text{wegen } n^{\nu i} u_\nu = 0), \\ &m^{i00} = n^i \ [\text{wegen (3.2) und (3.7)}]. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Lateinische Indizes nehmen die Werte 1, 2, 3 *an.*

Nun liefert ein Vergleich von (2.18) und (2.19):

$$\int_S \left\{ \int_{\sigma_3} \frac{\partial p_{00}}{\partial \underset{0}{x^i}} \, y^i \, T^{00} dy^1 dy^2 dy^3 \right\} ds = \int_S m^{i00} \frac{\partial p_{00}}{\partial x^i} \, ds \tag{3.9}$$

(y sind Koordinaten relativ zum Schnittpunkt von σ_3 mit der Weltlinie). Daher

$$n^i = \int_{\sigma_3} y^i \, T^{00} dy^1 dy^2 dy^3. \tag{3.10}$$

Es wird dabei die TAYLORentwicklung benutzt:

$$p_{\alpha\beta} = (p_{\alpha\beta})_0 + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial \underset{0}{x^\lambda}} y^\lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_{\alpha\beta}}{\partial \underset{0}{x^\lambda} \partial \underset{0}{x^\mu}} y^\lambda y^\mu + \ldots \tag{3.11}$$

Wir wollen für $T_{\alpha\beta}$ den bekannten Tensor der inkohärenten Materie, $\mu u_\alpha u_\beta$, ansetzen. Für ruhende Massen, die mit der Dichte $T^{00} = \mu$ verteilt sind, ist n^i das statische Moment in Bezug auf die y^i-Achse. Zieht man die Weltlinie selbst (deren Spur den Koordinatenanfang $y^i = 0$ bestimmt) durch den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) der Schnitte σ_3, so verschwinden die n^i. Ist die repräsentative Weltlinie gekrümmt, so werden die σ_3-Schnitte nicht mehr parallel sein, das Element einer Schicht wird einen Faktor $f \neq 1$ bekommen. Die Koordinatensysteme $(y^1 y^2 y^3)$ sind dann *momentane* Raumachsen. T^{00} wird für Materie, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, Korrekturen erfahren. Wir sagen, dass die n^λ auch im allgemeinen Fall bewegter Materie und RIEMANNschen Untergrundes *im wesentlichen* statische Momente sind in momentanen Räumen, die die Weltlinie orthogonal schneiden. ***Wir dürfen annehmen, dass die n^λ immer zum Verschwinden gebracht werden können,*** und zwar durch Ausbesserung der repräsentativen Weltlinie des Systems, die dazu durch die „Schwerpunkte" der σ_3-Schnitte gezogen werden soll.

Nun kehren wir zur mathematischen Behandlung unseres Problems zurück. Setzen wir zur Abkürzung für irgendwelche Tensoren $v^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ mit oberen und unteren Indizes

$$u^\alpha \nabla_\alpha v^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot} = \dot{v}^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot} \qquad (z.\ B.,\ \dot{n}^{\beta\lambda} = u^\alpha \nabla_\alpha n^{\beta\lambda}), \tag{3.12}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

so ist, wenn man (1.5) und (3.6) berücksichtigt und von partiellen Integrationen nach der Art von (3.2) Gebrauch macht:

$$\int\limits_S \nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta (n^{\alpha\lambda} u^\beta + n^{\beta\lambda} u^\alpha)\, ds = \frac{1}{2} \int\limits_S \xi_\varepsilon K^{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda} (n^{\alpha\lambda} u^\beta + 2 n^{\beta\lambda} u^\alpha)\, ds -$$

$$- \int\limits_S (\nabla_\lambda \xi_\beta)\, \dot{n}^{\beta\lambda} ds\,. \tag{3.13}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Den antisymmetrischen Tensor $\dot{n}^{\beta\lambda}$ spalten wir nach u^λ; d. h., wir zerlegen ihn wie folgt (die Zerlegung ist eindeutig):

$$\dot{n}^{\beta\lambda} = {}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^\beta u^\lambda - L^\lambda u^\beta, \tag{3.14}$$

$${}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) u_\lambda = {}^*(\dot{n}^{\beta\lambda})\, u_\beta = 0; \quad L^\beta u_\beta = 0.$$

Es ist dann

$$L^\beta = \dot{n}^{\beta\alpha} u_\alpha \tag{3.15}$$

und für die Gesamtheit der Glieder in (3.1), die Differentialquotienten der ξ_α in zu u^α orthogonalen Richtungen enthalten [vgl. (2.21)]:

$$-\int\limits_S \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\lambda} \left[{}^*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - L^\lambda u^\beta - {}^*m^{\beta\lambda} - M^\lambda u^\beta \right] ds = 0. \tag{3.16}$$

Wir wissen, dass daraus das Verschwinden des Klammerausdrucks folgt; es verschwindet somit sowohl der symmetrische Teil

$$\frac{1}{2} (L^\lambda u^\beta + L^\beta u^\lambda) + {}^*m^{\beta\lambda} + \frac{1}{2} (M^\lambda u^\beta + M^\beta u^\lambda) = 0, \tag{3.17}$$

als auch der antisymmetrische. Multipliziert man (3.16) mit u^β, so erhält man

$$L^\lambda + M^\lambda = 0, \quad \text{woher} \quad {}^*m^{\beta\lambda} = 0. \tag{3.18}$$

Dann [aus dem Verschwinden des antisymmetrischen Teils des Klammerausdrucks von (3.17)] folgt

$${}^*(\dot{n})^{\beta\lambda} = 0, \tag{3.19}$$

oder

$$\boxed{\dot{n}^{\beta\lambda} + \dot{n}^{\lambda\alpha} u_\alpha u^\beta - \dot{n}^{\beta\alpha} u_\alpha u_\lambda = 0.} \tag{3.20}$$

Zu diesen Beziehungen kommen die folgenden, die man aus der Bedingung $n^{\beta\lambda} u_\lambda = 0$ erhält, hinzu:

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_\lambda + n^{\beta\lambda} \dot{u}_\lambda = 0. \tag{3.21}$$

Man kann die beiden Systeme durch das System

$$\boxed{\dot{n}^{\beta\lambda} - n^{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha u^\beta + n^{\beta\alpha} \dot{u}_\alpha u^\lambda = 0} \tag{3.22}$$

ersetzen, aus welchem man zuerst (3.21), dann (3.20) wiedergewinnen kann. $\nabla_\alpha \xi_\beta$ kommen noch nur in Gliedern vor, in welchen sie nach partieller Integration verschwinden:

$$\int_S \nabla_\lambda \xi_\beta \left(-L^\beta u^\lambda + M^\beta u^\lambda\right) ds = \int_S 2\, \xi_\beta \dot{L}^\beta ds. \tag{3.23}$$

[Wir haben von (3.18) Gebrauch gemacht.]

Gleichung (3.1) ergibt jetzt, wenn man die Glieder mit ξ_α zusammenfasst:

$$-\int \xi_\alpha \Big[u^\nu \nabla_\nu (M u^\alpha) -$$

$$- \frac{1}{2} K^\alpha_{\beta\mu\lambda} (n^{\mu\lambda} u^\beta + 2\, n^{\beta\lambda} u^\mu) - 2 \dot{L}^\alpha \Big] ds = 0. \tag{3.24}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern muss verschwinden. Dann ist aber

$$\dot{M} u^\alpha + M \dot{u}^\alpha - \frac{1}{2} K^\alpha_{\beta\mu\lambda} (n^{\mu\lambda} u^\beta + 2 n^{\beta\lambda} u^\mu) - 2 \dot{L}^\alpha = 0. \tag{3.25}$$

Nun ist, nach (3.15), (3.21) und (3.22),

$$\dot{L}^\alpha = - n^{\alpha\nu} \ddot{u}_\nu , \tag{3.26}$$

aber zugleich $\dot{L}^\alpha = \ddot{n}^{\alpha\nu} u_\nu$ und, da $\ddot{n}^{\alpha\nu}$ antisymmetrisch ist,

$$u_\alpha \dot{L}^\alpha = 0. \tag{3.27}$$

$K^\alpha_{\beta\mu\lambda} u_\alpha u^\mu$ ist in β, λ symmetrisch, wie man leicht einsieht. Daher ist

$$K^\alpha_{\beta\mu\lambda} n^{\beta\lambda} u_\alpha u^\mu = 0,$$

wegen (3.6). Multipliziert man Gleichung (3.25) mit u^α, so erhält man

$$\dot{M} = 0, \qquad \text{also} \qquad \boxed{M = const.} \tag{3.28}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Für den antisymmetrischen Tensor $n^{\beta\lambda}$ können wir schreiben

$$2\,K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}n^{\beta\lambda} = \left(K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} - K^{\alpha}_{\lambda\mu\beta}\right) n^{\beta\lambda} = K^{\alpha}_{\mu\beta\lambda}n^{\beta\lambda}.$$

Berücksichtigen wir noch (3.26), so haben wir, anstatt (3.25),

$$\boxed{\begin{gathered} M\dot{u}^{\alpha} - K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}u^{\beta}n^{\mu\lambda} + 2n^{\alpha\lambda}\ddot{u}_{\lambda} = 0. \\ M = const. \end{gathered}} \tag{3.29}$$

[Wir erinnern, dass, nach (3.12),

$$\dot{u}^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds} + \left\{ {\lambda\,\mu \atop \alpha} \right\} u^{\lambda}u^{\mu}$$

ist.] *Das Glied, das $\ddot{u}^{\lambda}$ enthält, wird auch im Falle euklidischen Untergrundes vorkommen.*

So führt Gleichung (3.1) zu den Bewegungsgesetzen (3.6), (3.22) und (3.29). Es ist klar, dass, zusammen mit unseren vermittelnden Feststellungen über die Tensorkomponenten des Pols und des Dipols [wie z. B. (3.18)], unsere Bewegungsgesetze hinreichende Bedingungen für das Bestehen von (3.1) darstellen.

Für die 6 Funktionen $n^{\alpha\beta}$ und die 4 Funktionen u^{α} haben wir die 6 Gleichungen (3.22) und die 4 Gleichungen (3.29). Dass für unsere 10 Funktionen die Beziehungen

$$n^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0, \quad u^{\alpha}u_{\alpha} = 1 \tag{3.30}$$

gelten, kann man aus den Gleichungen ablesen. Man kann (3.30) dazu benutzen, die 10 Funktionen auf $3 + 3 = 6$ zurückzuführen.

Die Kraft

$$D^{\alpha} = K^{\alpha}_{\beta\mu\lambda}\,u^{\beta}\,n^{\mu\lambda} + 2n^{\alpha\lambda}\,\ddot{u}_{\lambda} \tag{3.31}$$

ist zu u^{α} orthogonal; dasselbe gilt sogar für jeden der 2 Summanden auf der rechten Seite von (3.31).

§ 4. *Dipol und Rotation; Präzession*

Die Dipolstärken $n^{\alpha\beta}$ lassen sich nach derselben Methode interpretieren, die uns im vorigen Paragraph zum Verständnis der n^{α}-Grössen verholfen hat. Die repräsentative Weltlinie des Systems sei wiederum, in unseren LORENTZschen Koordinaten, zur Zeitachse parallel. Die Materie

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

soll relativ zum Raumkoordinatensystem, in welchem der Schwerpunkt momentan ruht, langsame Bewegungen ausführen. Indem wir Quadrate der Geschwindigkeiten vernachlässigen, haben wir

$$T^{k0} = \left(\frac{\mu\, v^k}{1-v^2}\right) \overset{\infty}{=} \mu v^k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

[v^k sind die Raumkomponenten des Geschwindigkeitsfeldes der Materie relativ zum Schwerpunkt (Lichtgeschwindigkeit = 1)]. Wir haben weiter, nach der Zerlegung (3.3), in welcher u^α selbstverständlich sich auf die repräsentative Weltlinie beziehen ($u^0 = 1$, $u^k = 0$):

$$m^{ik0} = n^{ki} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3).$$

Der Gleichung (3.9) wird jetzt folgende Gleichung entsprechen:

$$\int\limits_S \left\{ \int\limits_{\sigma_3} \frac{\partial\, p_{k0}}{\partial x_0^i}\; y^i\, T^{k0} dy^1 dy^2 dy^3 \right\} ds = \int\limits_S \frac{\partial\, p_{k0}}{\partial x_0^i} m^{ik0} ds,$$

woher

$$n^{ki} = \int\limits_{\sigma_3} \mu y^i v^k dy^1 dy^2 dy^3 \,. \tag{4.1}$$

n^{ik} ist antisymmetrisch, daher

$$n^{ik} = \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma_3} \mu\, (v^i y^k - v^k y^i)\; dy^1 dy^2 dy^3,$$

oder

$$\boxed{n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, \Omega^{\alpha\beta},} \tag{4.2}$$

wobei $\Omega^{\alpha\beta}$ der Drehimpuls ist. $n^{\alpha\beta}$ sind *im wesentlichen* die Komponenten des Drehimpulses, wenn man ihn in Bezug auf einen Punkt der Schwerpunktsweltlinie für einen zur Weltlinie orthogonalen σ_3-Schnitt berechnet.

Wenn es gestattet ist, unser System als einen *starren Körper* zu behandeln, so ist

$$v^i = v^i_{\ r}\, y^r \qquad (i,\ r = 1, 2, 3), \tag{4.3}$$

wobei v_{ir} der antisymmetrische Tensor der Rotationsgeschwindigkeit ist [in orthogonalen Systemen gleichen Schraubsinns ist er durch einen Vektor ω^i darstellbar:

$$(v_{12},\ v_{23},\ v_{31}) = (-\ \omega_x\,,\ -\ \omega_y\,,\ -\ \omega_z\,)].$$

Dann ist

$$n^{ik} = v^{i}_{\ r} I^{kr} \tag{4.4}$$

mit

$$I^{kr} = \int \mu y^k y^r \, dy^1 dy^2 dy^3. \tag{4.5}$$

Ist das Trägheitsellipsoid des Körpers eine *Kugel,* so haben wir in einem kartesischen Koordinatensystem

$$I^{kr} = I \, \delta^{kr} = \begin{cases} I & (k = r) \\ 0 & (k \neq r) \end{cases} \tag{4.6}$$

und dementsprechend in einem nichtorthogonalen linearen System

$$n^{ik} = I v^{ik}. \tag{4.7}$$

In diesem einfachen Fall ist die rechte Seite von (4.4) antisymmetrisch und unser Dipolmodell ist dem mechanischen Problem adäquat. Im allgemeinen Rotationsfall muss man, wie wir weiter sehen werden, als Erweiterung des Gravitationsmodells den Quadrupol einführen. Zwischen dem skalaren Wert Ω des Drehimpulses und dem Drehimpulstensor $\Omega^{\alpha\beta}$ besteht die Beziehung

$$\Omega^{\alpha\beta} = \Omega q^{\alpha\beta}, \qquad \text{wobei } q^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = 1. \tag{4.8}$$

Aus der Gleichung (3.22) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \, u^{\alpha} \nabla_{\alpha} (n^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}) = \Omega \dot{\Omega} = 0, \qquad \boxed{\Omega = const.} \tag{4.9}$$

Ist Ω als Produkt von Trägheitsmoment I und Winkelgeschwindigkeit ω darstellbar und ist $I = const.$, so ist $\omega = const.$

Gelegentlich sei darauf hingewiesen, dass die Berechnung der Dipolstärken $n^{\alpha\beta}$ der angenäherten Berechnung der Dipolglieder des Potentials $\psi^{\alpha\beta}$ parallel läuft. Es ist nämlich $\psi^{\alpha\beta}$, wenn man Gravitationstheorie auf euklidischem Untergrunde treibt, in einem Weltpunkte 0 durch ein retardiertes Potential gegeben [vgl. Gleichung (2.11)] das, bis auf einen konstanten Faktor,

$$\int \left(\frac{T^{0i}}{r} \right)_{t - \frac{r}{c}} dy^1 dy^2 dy^3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

beträgt in einem Koordinatensystem, in welchem der nach 0 gerade zustrahlende Punkt der Weltlinie momentan ruht. Indem man für $\frac{1}{r}$ die ersten 2 Glieder seiner TAYLORentwicklung nimmt und die Integration

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

über den Lichtkegel durch Integration über einen zur Weltlinie orthogonalen Schnitt ersetzt, bekommt man (4.1) für die Komponenten der Dipolstärke.

Im Gravitationsskelett des rotierenden Körpers kommt der Drehimpulstensor gegenüber der Rotationsachse, die von der Grösse $\Omega^{\alpha\beta}$ aus konstruiert wird, als das Primäre vor. Man muss dabei an (4.3) anknüpfen. Die Rotationsachse eines symmetrischen Kreisels ist zum Drehimpulstensor orthogonal. Für die ***Rotationsachse*** c^{α} setzen wir daher:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha)\ c_{\alpha}n^{\alpha\beta} = 0, \\ &(\beta)\ c_{\alpha}u^{\alpha} = 0, \\ &(\gamma)\ c_{\alpha}c^{\alpha} = -1. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Differentiation ergibt

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha)\ \dot{c}_{\alpha}n^{\alpha\beta} = -\ c_{\alpha}\dot{n}^{\alpha\beta} = 0, \quad \text{nach (3.22) und (4.10),} \\ &(\beta)\ \dot{c}_{\alpha}u^{\alpha} = -\ c_{\alpha}\dot{u}^{\alpha}\,. \\ &(\gamma)\ \dot{c}_{\alpha}c^{\alpha} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

$\dot{c}^{\alpha}$ ist demnach zu drei unabhängigen Raumrichtungen orthogonal: zum Flächenelement $n^{\alpha\beta}$ und zu c^{α}; es ist zeitartig und durch

$$\boxed{\dot{c}^{\alpha} = -\ (c_{\nu}\dot{u}^{\nu})u^{\alpha}} \tag{4.12}$$

gegeben; $\dot{u}^{\alpha}$ ist aus (3.29) zu entnehmen. ***Bewegung des Schwerpunkts und Übertragung der Rotationsachse sind gekoppelt.***

Das Gesetz (4.12) ist mit der FOKKERschen Präzessionsregel unvereinbar. Es fehlt nämlich bei FOKKER der Einfluss der zweiten Ableitungen der $g_{\alpha\beta}$ (des Krümmungstensors: dieser Einfluss kann, wenigstens theoretisch, durch Verminderung des Rotationsmoments beliebig herabgesetzt werden). Das ist ja selbsverständlich: die FOKKERsche Vorschrift ist in der Voraussetzung konstruiert, dass das Beharrungsgesetz für die Achse ***lokal euklidisch*** ist, d. h., im Vergleich mit dem euklidischen Gesetz Zusätze erfährt, die in einem geodätischen Koordinatensystem im bezüglichen Punkte verschwinden. Andererseits kommt bei FOKKER* zwischen der Achsenübertragung und der nichtgeodätischen Bewegung des Schwerpunkts in einer krümmungslosen Welt eine Kopplung vor, die mit der durch (4.12) gegebenen gleich-

---

* Bei sinngemässer Erweiterung seines für eine geodätische Linie formulierten Ansatzes.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

bedeutend ist, wie wir gleich sehen werden. (Dass die eventuellen Kräfte die Bewegung des Schwerpunkts allein beeinflussen, sei vorausgesetzt.) Man beachte dabei folgendes. Unter den Gleichungen (4.12) ist nur Gleichung (α) dynamischen Inhalts; sie beruht nämlich auf der Gleichung (3.19), die besagt, dass der zu u^α orthogonale Bestandteil des Rotations*moments* während der Bewegung konstant bleibt (oder, allgemeiner, parallele Verpflanzung erfährt). In völlig analoger Weise besagt die Regel FOKKERs, dass der zu u^α orthogonale Bestandteil der Rotations*achse* Parallelverschiebung erfährt.

Ist d^α ein Vektor, der in einem Punkt der Bahn mit der Rotationsachse c^α zusammenfällt, so ist c^α im benachbarten Punkt, nach FOKKER, ein zur orthogonalen Komponente ${}^*d^\alpha$ proportionaler Vektor:

$$c^\alpha = \beta {}^*d^\alpha, \quad {}^*d^\alpha = d^\alpha - (d_\nu u^\nu)\, u^\alpha \quad . \tag{4.13}$$

d^α wird dabei längs der Weltlinie des Schwerpunkts parallel verschoben: $\dot{d}^\alpha = 0$. Den Faktor β führen wir ein, damit c^α auf Einheitslänge normiert werden kann. Wir finden

$$\dot{c}^\alpha = \beta {}^*\dot{d}^\alpha + \dot{\beta} {}^*d^\alpha =$$

$$= -\beta \left[(d_\nu \dot{u}^\nu)\, u^\alpha + (d_\nu u^\nu) \dot{u}^\alpha \right] + \frac{\dot{\beta}}{\beta} c^\alpha$$

$$\left[({}^*\dot{d}^\alpha) = u^\nu \nabla_\nu {}^*d^\alpha \right].$$

Nun ist es leicht anzusehen, dass, wegen $d^\alpha = c^\alpha$, in unserem Anfangspunkt,

$$\beta = \frac{1}{1 + (d^\alpha u_\alpha)^2} = 1,$$

$$\dot{\beta} = 0$$

zu setzen ist. Dann stimmt das FOKKERsche $\dot{c}^\alpha$ mit unserem $\dot{c}^\alpha$ [Formel (4.12)] überein.

§ 5. *Der Quadrupol*

Berücksichtigt man das Quadrupolglied im Gravitationsskelett, so ist die Variationsgleichung des Problems:

$$\int\limits_s \left[p_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + (\nabla_\lambda p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\alpha\beta} + (\nabla_\lambda \nabla_\mu p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\mu\alpha\beta} \right] ds = 0. \tag{5.1}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Das erweiterte Gravitationsskelett befreit uns von den Beschränkungen, die an die Voraussetzung (3.6) gebunden sind, dass $n^{\alpha\beta}$ antisymmetrisch ist [vgl. oben das gelegentlich der Gleichung (4.7) Gesagte].

$m^{\lambda\mu\alpha\beta}$ ist selbstverständlich in α, β symmetrisch; es kann als in λ, μ symmetrisch angesetzt werden; der antisymmetrische Teil (Indizes in ekkigen Klammern) würde nur einen Beitrag

$$(\nabla_\lambda \nabla_\mu p_{\alpha\beta}) m^{[\lambda\mu]\alpha\beta} = (\nabla_{[\lambda} \nabla_{\mu]} p_{\alpha\beta})\, m^{\lambda\mu\alpha\beta} = p_{\varepsilon\beta}\, Q^{\varepsilon\beta}$$

zum Pol liefern mit

$$Q^{\varepsilon\beta} = \frac{1}{2} (K^{\varepsilon}_{\alpha\mu\lambda}\, m^{[\lambda\mu]\alpha\beta} + K^{\varepsilon}_{\nu\mu\lambda} m^{[\lambda\mu]\beta\nu}) = K^{\varepsilon}_{\alpha\mu\lambda} m^{[\lambda\mu]\alpha\beta}.$$

Spalten wir nach u^α:

$$m^{\lambda\mu\alpha\beta} = {}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} + (b^{\lambda\mu\alpha} u^\beta + b^{\lambda\mu\beta} u^\alpha) + b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + \ldots \tag{5.2}$$

(${}^*m^{\cdots\cdot}$ und $b^{\cdots}$ sind in allen Indizes zu u^α orthogonal), so haben wir, analog zu (3.4),

$$\int\limits_S \frac{\partial^3 \xi_\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\mu \partial x^\alpha} ({}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} + b^{(\lambda\mu\alpha)} u^\beta)\, ds = 0,$$

woher

$$ {}^*m^{(\lambda\mu\alpha)\beta} + b^{(\lambda\mu\alpha)} u^\beta = 0. \tag{5.3}$$

(Runde Klammern bedeuten eine symmetrische Summe:

$$a^{(\lambda\mu\nu)} = \frac{1}{3!} \sum a^{\lambda\mu\nu}$$

über alle Permutationen summiert.)

Multiplikation mit u_β liefert

$$b^{(\lambda\mu\alpha)} = 0. \tag{5.4}$$

Dann aber kann (5.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} \right) {}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} = 0.$$

Die Schlussweise, die uns zu (3.7) geführt hat, ist auch im vorliegenden Fall anwendbar, und wir erhalten

$$ {}^*m^{\lambda\mu\alpha\beta} = 0. \tag{5.5}$$

In der Zerspaltung (5.2) können wir Glieder, die u^λ oder u^μ enthalten, ausser Acht lassen, da sie, wie man leicht einsieht, auf Dipole und Pole zurückführbar sind. Auf Glieder, die $b^{\cdots}$ mit 3 Indizes enthalten, werden wir verzichten, da wir nur solche Bestimmungsstücke des mechanischen Systems einführen wollen, die klassische Gegenstücke besitzen (d. h., als *im wesentlichen* bekannte Grössen der Mechanik der Punktsysteme gedeutet werden können). Die nichtklassischen Grössen, die den $b^{\cdots}$ zuzuordnen sind, sind die Momente zweiten Grades des Geschwindigkeitsfeldes:

$$b^{rkl} = \frac{1}{2}\int \mu y^r y^k v^l \, dy^1 dy^2 dy^3. \tag{5.6}$$

Das Deutungsverfahren läuft demjenigen, das zu (4.1) führt, völlig parallel.

So bleibt uns nur die Voraussetzung übrig, dass in der Gleichung (5.1) der Quadrupol durch das Glied $b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta$ vorkommt:

$$m^{\lambda\mu\alpha\beta} = b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta. \tag{5.7}$$

Das ergibt, wie wir sehen werden, ein in sich geschlossenes, widerspruchsfreies System von mechanischen Bestimmungsstücken des materiellen Systems.

Durch elementare Umformungen, bei welchen wir von Vertauschungsrelationen für kovariante Ableitungen [Formeln (1.5) und (2.7)] wiederholten Gebrauch machen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & b^{\beta\lambda} u^\alpha u^\beta \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla_\alpha \xi_\beta = \\ & = -(\nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\beta)\, u^\alpha \nabla_\alpha (b^{\lambda\mu} u^\beta) + K^{\varepsilon}_{\beta\alpha\mu,\lambda}\, \xi_\varepsilon b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + \\ & + \nabla_\varepsilon \xi_\beta (K^{\varepsilon}_{\mu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta + 2K^{\beta}_{\nu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\varepsilon} u^\nu u^\alpha)\ . \end{aligned} \tag{5.8}$$

[Ein für uns unwesentliches Glied $u^\alpha \nabla_\alpha (\ldots)$ lassen wir einfach fort.] Wir benutzen dabei die Bezeichnung

$$K^{\varepsilon}_{\beta\alpha\mu,\lambda} = \nabla_\lambda K^{\varepsilon}_{\beta\alpha\mu}\,. \tag{5.9}$$

Obwohl in (5.8) dritte Ableitungen der ξ_α nicht vorkommen, kann das Quadrupolglied auf Glieder niederer Polarität *nicht* zurückgeführt werden. Das Glied, das zweite Ableitungen von ξ_α enthält, ist nicht von der Gestalt $(\nabla_\lambda\, p_{\alpha\beta}) q^{\alpha\beta}$.

Wir spalten $\dot{b}^{\beta\mu}$ nach u^α :

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$\dot{b}^{\lambda\mu} = {}^*(\dot{b}^{\lambda\mu}) + Z^\lambda u^\mu + Z^\mu u^\lambda + Z u^\lambda u^\mu \,. \tag{5.10}$$

Es ist leicht zu sehen, dass man dem $\dot{b}^{\lambda\mu}$-Glied, insofern es sich um zweite Ableitungen der ξ_α handelt, dadurch Rechnung trägt, dass man in Gleichung (3.4)

$$M^{\lambda\alpha\beta} = {}^*m^{\lambda\alpha\beta} - b^{\lambda\alpha}\dot{u}^\beta \tag{5.11}$$

anstatt ${}^*m^{\lambda\alpha\beta}$ und

$$N^{\alpha\lambda} = n^{\alpha\lambda} - {}^*(\dot{b}^{\alpha\lambda}) \tag{5.12}$$

anstatt $n^{\alpha\lambda}$ einführt. So erhält man, anstatt (3.6),

$$N^{\alpha\lambda} \equiv n^{\alpha\lambda} - {}^*(\dot{b}^{\alpha\lambda}) = -N^{\lambda\alpha} \,. \tag{5.13}$$

Wir wollen nun versuchen, (5.13) physikalisch zu deuten. Die uns geläufige Deutung ergibt *im wesentlichen* die Stärke des Quadrupolglieds in der Entwicklung eines NEWTONschen Potentials nach Multipolen:

$$b^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \sum \mu y^\lambda y^\mu \,. \tag{5.14}$$

Wir haben das Integral durch eine Summe ersetzt; μ ist jetzt die Masse eines individuellen Materieelements, y^α seine Koordinaten relativ zum Schwerpunkt in seiner *gleichzeitigen* Lage ($y^\alpha u_\alpha = 0$). Der Vektor

$$\frac{dy^\alpha}{ds} = v^\alpha$$

ist *im wesentlichen* die Geschwindigkeit relativ zum Schwerpunkt und zu u^α orthogonal. ${}^*(\dot{b}^{\alpha\lambda})$ kann *im wesentlichen* mit $\dot{b}^{\alpha\lambda}$ identifiziert werden, und wir erhalten für $N^{\alpha\lambda}$, nach (5.14) und (4.1):

$$N^{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \sum \mu \,(v^\alpha y^\lambda - v^\lambda y^\alpha) = \frac{1}{2}\,\Omega^{\alpha\lambda}; \tag{5.15}$$

es ist tätsächlich antisymmetrisch, ohne dass man die Allgemeinheit des Systems einschränkt [vgl. das gelegentlich der Formel (4.7) Gesagte]; es ist gleich dem halben in Bezug auf den Schwerpunkt gebildeten Drehimpulstensor. Weiter folgt aus (5.13), dass *im wesentlichen*

$$n^{\alpha\lambda} - n^{\lambda\alpha} \equiv 2n^{[\alpha\lambda]} = \Omega^{\alpha\lambda} \tag{5.16}$$

ist.

Der Gleichung (3.6) entspricht jetzt, wegen (5.13), die Gleichung

$$M^{\lambda\alpha\beta} + M^{\alpha\lambda\beta} = 0;$$

wegen (5.11) folgt aus ihr

$$\frac{1}{2}\, {}^*m^{\lambda\alpha\beta} + \frac{1}{2}\, {}^*m^{\alpha\lambda\beta} - b^{\lambda\alpha}\dot{u}^{\beta} = 0,$$

woher, da ${}^*m^{\lambda[\alpha\beta]} = 0$ ist,

$$\frac{1}{2}\, {}^*m^{[\alpha\beta]\lambda} = b^{\lambda[\alpha}\dot{u}^{\beta]}.$$

Das Glied von (5.8), das die ξ_β zweimal differentiiert enthält, ist $-(\nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta)\, \dot{b}^{\lambda\alpha} u^\beta$. Seine aus der Spaltung (5.11) entspringenden Bestandteile

$$-(\nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta)\, Z^\lambda u^\alpha u^\beta, \quad -(\nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta)\, Z u^\lambda u^\alpha u^\beta$$

gehören wegen des symmetrischen Faktors $u^\alpha u^\beta$: der erste zum n^λ-Dipolglied, der zweite (nach partieller Integration) zum Polglied. Es bleibt somit

$$\begin{aligned} &-(\nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi_\beta)\, Z^\alpha u^\lambda u^\beta = \\ &= -(2\nabla_{[\lambda} \nabla_{\alpha]} \xi_\beta)\, Z^\alpha u^\lambda u^\beta - (\nabla_\alpha \nabla_\lambda \xi_\beta)\, Z^\alpha u^\lambda u^\beta = \qquad (5.17) \\ &= -\xi_\varepsilon K^{\varepsilon}_{\ \beta\alpha\lambda} Z^\alpha u^\lambda u^\beta + \text{ein } n^\alpha\text{-Dipolglied.} \end{aligned}$$

Glieder niederer Polarität, die aus den $b^{\lambda\mu}$-Gliedern entspringen, betrachten wir selbstverständlich als in den Dipol- und Polgliedern mit einbegriffen.

Wir wollen noch das Glied $(\nabla_\varepsilon \xi_\beta)\, K^{\varepsilon}_{\ \mu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\beta$ von (5.8) umformen. Wir spalten nach der Formel:

$$K^{\varepsilon}_{\ \mu\alpha\lambda} b^{\lambda\mu} u^\alpha = \rho^\varepsilon + \rho u^\varepsilon \qquad (\rho_\alpha u^\alpha = 0). \qquad (5.18)$$

Der Koeffizient von $\nabla_\varepsilon \xi_\beta$ in (5.8) ist dann

$$\rho u^\varepsilon u^\beta + \rho^\varepsilon u^\beta + \rho^{\varepsilon\beta} \qquad (\rho^{\varepsilon\beta} u_\varepsilon = \rho^{\varepsilon\beta} u_\beta = 0)$$

mit

$$\rho^{\varepsilon\beta} = 2\, K^{\beta}_{\ \nu\alpha\lambda}\, b^{\lambda\varepsilon} u^\nu u^\alpha. \qquad (5.19)$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$\rho u^{\varepsilon} u^{\beta}$ ergibt einen einfachen Pol. Da $n^{\beta\lambda}$, wie man aus (5.13) sieht, nicht mehr antisymmetrisch ist, spalten wir $\dot{n}^{\beta\lambda}$ nach der Formel

$$\dot{n}^{\beta\lambda} = *(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^{\beta} u^{\lambda} - L'^{\lambda} u^{\beta} + L u^{\beta} u^{\lambda}, \tag{5.20}$$

anstatt nach (3.14). Es ist

$$L = \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta} u_{\lambda},$$

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_{\lambda} = L^{\beta} + L u^{\beta},$$

$$\dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta} = - L'^{\lambda} + L u^{\lambda},$$

$$L^{\beta} + L'^{\beta} = \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\lambda} - \dot{n}^{\beta\lambda} u_{\beta} = 2\dot{n}^{[\beta\lambda]} u_{\lambda} = \dot{\Omega}^{\beta\lambda} u_{\lambda} = - \Omega^{\beta\lambda} \dot{u}_{\lambda}. \tag{5.21}$$

Das Glied $L u^{\beta} u^{\lambda}$ in (5.20) rechnen wir zum Polglied mit. Anstatt (3.13) haben wir jetzt

$$\int_S \nabla_{\lambda} \nabla_{\alpha} \xi_{\beta} (N^{\alpha\lambda} u^{\beta} + n^{\beta\lambda} u^{\alpha})\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \xi_{\varepsilon} K^{\varepsilon}_{\ \beta\alpha\lambda} (N^{\alpha\lambda} u^{\beta} + 2 n^{\beta\lambda} u^{\alpha}) ds -$$

$$- \int_S (\nabla_{\lambda} \xi_{\beta}) \left[*(\dot{n}^{\beta\lambda}) + L^{\beta} u^{\lambda} - L'^{\lambda} u^{\beta} \right] ds.$$

Gleichung (3.16) ist durch

$$\frac{\partial \xi_{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \left[*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - \rho^{\lambda\beta} - (L'^{\lambda} + M^{\lambda} + \rho^{\lambda}) u^{\beta} - *m^{\beta\lambda} \right] = 0$$

zu ersetzen, und es folgen aus ihr die Gleichungen

$$L'^{\lambda} + M^{\lambda} + \rho^{\lambda} = 0, \tag{5.22}$$

$$*(\dot{n}^{\beta\lambda}) - \rho^{\lambda\beta} - *m^{\beta\lambda} = 0. \tag{5.23}$$

Da (5. 22) an die Stelle von (3.18) kommt, werden wir jetzt

$$\int_S \nabla_{\lambda} \xi_{\beta} (- L^{\beta} u^{\lambda} + M^{\beta} u^{\lambda})\, ds = \int_S \xi_{\beta} (\dot{L}^{\beta} + \dot{L}'^{\beta} + \dot{\rho}^{\beta}) ds \tag{5.24}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

anstatt (3.23) haben. Das $b^{\lambda\mu}$ - Glied liefert unter dem Integrationszeichen, alles in allem genommen, folgenden Ausdruck mit dem Faktor ξ_β :

$$\xi_\beta \left(K^{\beta}_{\nu\alpha\mu,\lambda} b^{\lambda\mu} u^\alpha u^\nu + \dot{\rho}^\beta - K^{\beta}_{\nu\alpha\lambda} Z^\alpha u^\lambda u^\nu\right). \tag{5.25}$$

Das Glied mit Z^α stammt aus (5.17). Man erhält aus (5.10)

$$Z^\alpha = \dot{b}^{\varepsilon\alpha} u_\varepsilon - \dot{b}^{\varepsilon\nu} u_\varepsilon u_\nu u^\alpha$$

und aus (5.18)

$$\rho^\lambda = K^{\beta}_{\mu\alpha\lambda} b^{\lambda\mu} u^\alpha - u^\beta K^{\nu}_{\mu\alpha\lambda} b^{\lambda\mu} u_\nu u^\alpha .$$

Gleichung (3.23) wird ein Zusatzglied erhalten, das (5.25) entspricht. Durch Nullsetzen der Koeffizienten von ξ_α erhalten wir die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes:

$$u^\nu \nabla_\nu (M u^\alpha) + p^\alpha = 0 . \tag{5.26}$$

Den Ausdruck für p^α wollen wir nur für den einfachen Fall verschwindender Krümmung $K_{....}$ angeben. Nach (5.24) und (5.21) ist dann

$$p^\alpha = \Omega^{\alpha\lambda} \ddot{u}^\lambda + \dot{\Omega}^{\alpha\lambda} \dot{u}_\lambda . \tag{5.27}$$

Gleichung (5.23) ergibt, indem man ihren antisymmetrischen Bestandteil abspaltet:

$$*(\dot{n}^{[\beta\lambda]}) - \rho^{[\lambda\beta]} = 0. \tag{5.28}$$

Nun ist [vgl. (3.14) und (3.15)]

$$*(\dot{n}^{[\beta\lambda]}) = \dot{n}^{[\beta\lambda]} + \dot{n}^{[\beta\alpha]} u_\alpha u^\lambda - \dot{n}^{[\lambda\alpha]} u_\alpha u^\beta .$$

Es ist also, wenn man (5.19) benutzt und $\frac{1}{2}\,\Omega^{\beta\lambda}$ anstatt $n^{[\beta\lambda]}$ schreibt [vgl. (4.2), wo $n^{\alpha\beta}$ als antisymmetrisch vorausgesetzt wird, und (3.21)]:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\dot{\Omega}^{\beta\lambda} - \Omega^{\lambda\alpha} \dot{u}_\alpha u^\beta + \Omega^{\beta\alpha} \dot{u}_\alpha u^\lambda\right) = \left(K^{\beta}_{\nu\alpha\varepsilon} b^{\varepsilon\lambda} - K^{\lambda}_{\nu\alpha\varepsilon} b^{\varepsilon\beta}\right) \dot{u}^\nu u^\alpha .} \tag{5.29}$$

$\frac{1}{2}\,\Omega^{\beta\lambda}$ wurde einfach anstatt $n^{[\beta\lambda]}$ gesetzt. Wir wissen, dass $\Omega^{\beta\lambda}$ *im wesentlichen* der Drehimpuls ist. Ist $b^{\varepsilon\lambda}$ von der Gestalt

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$A(\overset{\varepsilon}{u}\overset{\lambda}{u} - g^{\varepsilon\lambda})$$

(Trägheits*kugel)*, so verschwindet die rechte Seite von (5.29), die, wie wir gleich sehen werden, *im wesentlichen* die klassische Präzession wiedergibt.

Probe auf klassische Verhältnisse. Will man den Grenzübergang $c = \infty$ durchführen, so soll man in (5.29):

$$u^0 = 1, \quad u^i = 0, \quad \dot{u}^\alpha = 0, \quad b^{0\alpha} = 0 \quad (\text{wegen } b^{\nu\alpha} u_\nu = 0)$$

setzen. So erhalten wir Gleichung (5.29) in ihrer nichtrelativistischer Gestalt:

$$K^i_{00s}\, b^{sk} - K^k_{00s}\, b^{si} = \frac{1}{2} \frac{d\,\Omega^{ik}}{d\,t} \tag{5.30}$$

(lateinische Indizes laufen, wie immer, die Werte 1, 2, 3 durch; der Index 0 entspricht der Zeit: $x^0 = t$). Für den Krümmungstensor nehmen wir die genäherte Formel (2.1) an, indem wir $K_{....}$ als schwaches Feld auf euklidischem Untergrunde ansehen. Dann haben wir für das *statische* zentralsymmetrische Feld:

$$K_{i00s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\, \partial x^s} = -m \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i\, \partial x^s}\,; \quad K^i_{00s} = -K_{i00s}\,.$$

(Es wurde $g^{00} = 1 - \frac{2m}{r}$ angenommen). Die NEWTONsche Kraft ist

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{k m_o}{r}\,,$$

das Moment, bezogen auf den Schwerpunkt:

$$X^{ik} = \sum \mu\, (X^i y^k - X^k y^i)\,.$$

Es ist $m = \frac{k m_o}{c^2}$, m_o Masse des Zentralkörpers in *gr*, k die gewöhnliche Gravitationskonstante. Da für den Schwerpunkt

$$\sum \mu y^i = 0$$

ist, haben wir, bis auf höhere Glieder der TAYLORentwicklung von X^i [vgl. (5.14)]:

$$X^{ik} = 2km_0 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^i \, \partial x^s} b^{sk} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^k \, \partial x^s} b^{si} \right),$$

und (5.30) ist nichts anderes, als der klassische Satz von der Zeitableitung des Drehimpulses:

$$\frac{d\Omega^{ik}}{dt} = X^{ik}.$$

[Wir haben die rechte Seite von (5.30) durch c^2 geteilt, da wir *sec* als Zeitenheit einführen.]

§ 6. Wichtige Sonderfälle. Die Energiegleichung. Spezielle Relativitätstheorie

Bildet die Metrik $ds^2 = (dx^0)^2 - \Sigma (dx^l)^2$ den Untergrund, so ist in den Gleichungen (5.29) die rechte Seite gleich Null zu setzen. Dann aber verschwindet das zweite Glied rechts in (5.27), und wir haben folgende Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes:

$$M\dot{u}^\alpha + \Omega^{\alpha\nu}\ddot{u}_\nu = P^\alpha \qquad (M = const.). \tag{6.1}$$

P^α führen wir als eine äussere Kraft ein. Für den Drehimpuls $\Omega^{\lambda\mu}$ haben wir die Gleichungen

$$\dot{\Omega}^{\beta\lambda} - \Omega^{\lambda\alpha}\dot{u}_\alpha u^\beta + \Omega^{\beta\lambda}\dot{u}_\alpha u^\lambda = 0. \tag{6.2}$$

Von der Kraft P^α setzen wir voraus, dass sie zu u^α orthogonal ist:

$$P^\alpha u_\alpha = 0. \tag{6.3}$$

Diese Bedingung folgt mit Notwendigkeit aus (6.2). Im Falle eines Körpers, dessen Gravitationsskelett von einem einfachen Pol besteht, gelangt man zum Gleichungsystem

$$\frac{d(Mu^\alpha)}{ds} = P^\alpha \qquad (P^\alpha u_\alpha = 0),$$

in welchem P^α aus der Wirkung des elektromagnetischen Feldes anderer Körper und der Rückwirkung der Strahlung besteht (der Körper ist geladen wie ein einfacher elektrischer Pol). Setzt man voraus, dass der Gravitationsdipol und -quadrupol in den elektromagnetischen Kraftwirkungen keine Änderungen hervorbringen, so erkennt man, dass die Gleichung

$$\frac{d(Mu^\alpha)}{ds} + \Omega^{\alpha\nu}\ddot{u}_\nu = P^\alpha$$

bestehen muss, wenn Gravitationsmultipol und elektromagnetische Wirkungen nebeneinander existieren. Aus der letzten Gleichung folgt $M = const.$ und Gleichung (6.1). Wir setzen voraus, dass die Ladung keine Präzessionswirkungen hervorruft, so dass (6.2) richtig bleibt.

Der Gleichung (6.1) kann man folgende Gestalt geben:

$$\frac{d}{ds}(Mu^{\alpha} - 2L^{\alpha}) = P^{\alpha}, \qquad L^{\alpha} = -\frac{1}{2}\Omega^{\alpha\nu}\dot{u}_{\nu} \tag{6.4}$$

[vgl. (3.26)]. Wegen (6.3) ist, wie bekannt, P^0 die Leistung der Kraft P^i:

$$P^0 = P^1 v^1 + P^2 v^2 + P^3 v^3.$$

v^i ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad (t = x^0).$$

Wir führen in (6.4) die Systemzeit t anstatt der Eigenzeit ein:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d}{dt}, \qquad (v^2 = \Sigma v_i^2),$$

$$\frac{d}{dt}(Mu^0 - 2L^0 - A) = 0. \tag{6.5}$$

A ist die Arbeit von P^i; sie enthält eine willkürliche additive Konstante. Aus (6.5) erhalten wir den Energiesatz in der Form

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} + \Omega^{0i}\dot{u}_i = A.$$

Es ist aber

$$\Omega^{0i}u_0 = -\Omega^{ki}u_k, \text{ d. h., } \Omega^{0i} = -\Omega^{ki}v_k;$$

$$\Omega^{0i}\dot{u}_i = -\Omega^{ki}\frac{\dot{v}_i v_k}{\sqrt{1-v^2}},$$

mithin

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\Omega^{ik}}{1-v^2}v_i\frac{dv_k}{dt} = A.} \tag{6.6}$$

Führt man die gewöhnliche Zeiteinheit ($c = 3.10^{10}$ *cm sec*$^{-1}$) und, unter Zugrundelegung eines bis auf orthogonale Transformationen der *Raum*achsen bestimmten LORENTZschen Koordinatensystems, Vektorsymbole ein, so erhält (6.6) die Form

$$\boxed{\frac{c^2 M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{v^2}}} + \frac{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]\,\dot{\mathfrak{v}}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = A.} \tag{6.7}$$

Neben der Arbeit der äusseren Kraft (oder der potentiellen Energie: $A = -E_{pot} + const.$, wenn die Kraft aus einem Potential ableitbar ist) und der relativistischen Energie $c^2 M + \frac{1}{2} M v^2 + \ldots$ enthält unser Energiesatz (6.7) noch ***Beschleunigungsenergie,*** die sich als skalares Produkt zweier Vektoren ausdrückt: des Vektorproduktes von Drehimpuls und Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Es ist

$$(\Omega^{12},\ \Omega^{23},\ \Omega^{31}) = (\mathfrak{w}_z,\ \mathfrak{w}_x,\ \mathfrak{w}_y)$$

der Drehimpuls des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt,

$$(v^1,\ v^2,\ v^3) = (\mathfrak{v}_x,\ \mathfrak{v}_y,\ \mathfrak{v}_z)$$

die Geschwindigkeit des Schwerpunkts,

$$[\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}]_x = \mathfrak{w}_y\,\mathfrak{v}_z - \mathfrak{w}_z\,\mathfrak{r}_y = -(\Omega^{13}\,v^3 + \Omega^{12}\,v^2) = -\sum \Omega^{1k}\,v^k, \text{ usf.}$$

In nichtrelativistischer Fassung $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ besagt unser Energiesatz, falls ein Kräftepotential existiert:

$$\boxed{E_{kin} + E_{pot} + \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]\,\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = E = const.} \tag{6.8}$$

Statisches Gravitationsfeld. Ist die Metrik $ds^2 = f^2\,dt^2 + g_{ik}\,dx^i dx^k$ ($i, k, = 1, 2, 3$) des Untergrundes von der Zeit $x^0 = t$ unabhängig, so ist für einen kovarianten Tensor A_λ

$$\dot{A}_0 \equiv u^\nu \nabla_\nu A_0 = \frac{d\,A^0}{d\,s} - \frac{\partial\,g_{\mu\nu}}{\partial\,x^0} A^\mu A^\nu = \frac{d\,A_0}{d\,s}. \tag{6.9}$$

Da die g_{0i} gleich Null sind, verschwinden sämtliche $K^0_{\lambda\mu\nu}$, und die 0-te Komponente der Gleichung (3.29) vereinfacht sich für einen nicht geladenen Körper ($P^a = 0$) zu

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

$$M\dot{u}^0 + 2n^{\alpha\nu}\dot{u}_\nu = 0.$$

Für die kovariante 0-te Komponente haben wir nach (6.9), wegen (3.26), indem wir $n^{\alpha\beta}$ durch $\frac{1}{2}\,\Omega^{\alpha\beta}$ ersetzen:

$$\frac{d}{ds}(Mu_0 - 2L_0) = 0,$$

$$L^0 = -\frac{1}{2}\,\Omega^{0\nu}\,\dot{u}_\nu = -\frac{1}{2}\,\Omega^{ki}v_k\,\dot{u}_i\,,$$

$$Mu_0 - 2\,L_0 = const.$$

Wir benutzen dabei die Beziehungen

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}\,,\ u^0 = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{f^2-v^2}}\,,\ u^i = \frac{v^i}{\sqrt{f^2-v^2}}\,,\ v^2 = -\,g_{ik}\,v^i\,v^k\,.$$

Wir gelangen so zu einer Beziehung, die zu (6.6) analog ist:

$$\boxed{\frac{Mf^2}{\sqrt{f^2-v^2}} + f^2\sqrt{f^2-v^2}\,\Omega^{ik}u_i\,\dot{u}_k = E = const.} \tag{6.10}$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass das mechanische System ein Dipolskelett besitzt (Trägheitskugel).

Streszczenie

Prawa pola (elektromagnetycznego i grawitacyjnego) nazewnątrz materii przyjmujemy w postaci równań MAXWELLA-EINSTEINA. (Nasze wywody są, zresztą, oparte tylko na pewnych cechach zasadniczych struktury tych równań.) Materię charakteryzujemy przez potencjały wytwarzanego przez nią pola. Potencjały te dają się przedstawić, jako sumy potencjałów multipoli (podobnie do potencjału NEWTONOWSKIEGO bryły materialnej, nazewnątrz bryły). W ten sposób dochodzimy do pojęcia ***szkieletu grawitacyjnego*** systemu materialnego nienaładowanego. W szkielecie grawitacyjnym biegun pojedyńczy charakteryzuje masę, dipol i kwadrupol — moment obrotu. Podporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Z równań, spełnianych przez potencjały w świecie czterowymiarowym, otrzymujemy równania mechaniki w postaci równań o pochodnych zwykłych, określające ruch środka masy układu i zmiany naszych multipoli w czasie. *Z równań tych wynika, że ruch środka masy i obrót są z sobą*

związane. Nowe wyrazy w równaniach mechaniki, powodujące to powiązanie, znikają przy założeniu, że prędkość światła jest nieskończenie wielka. Równanie energii dla nowych równań mechaniki zawiera nowy wyraz: *energię przyśpieszeniową*.

Uwzględnienie multipoli do kwadrupolu włącznie jest potrzebne i wystarczające, aby otrzymać prawa ruchu, przechodzące w prawa klasycznej mechaniki układu punktów i ciała sztywnego, gdy się założy, że prędkość światła jest nieskończenie wielka. Interpretacja multipoli przez wielkości klasyczne ma charakter przybliżony, natomiast równania ruchu, dla nich otrzymane, są matematycznie ścisłym warunkiem istnienia osobliwości multipolowych w rozwiązaniach równań grawitacyjnych nazewnątrz materii. Można przeto uważać multipole za samodzielną charakterystykę dynamiczną układu.

Oś obrotu występuje u nas jako konstrukcja wtórna (i to jest kwestią zasadniczą), natomiast wielkością, charakteryzującą obrót pierwotnie, jest tensor antysymetryczny. Dochodzimy do powiązania obrotu i ruchu środka masy według prawa, odmiennego od założenia FOKKERA co do ruchu osi bąka symetrycznego.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. VI (1937) Fasc. 3

Literatur

Die Arbeiten des Verfassers:

ZS. f. Phys. **67**, 270 (1931) (Methode der Variationsgleichung);

ZS. f. Phys. **69**, 389 (1931) (ein strahlendes Elektron im äusseren Feld);

Math. Ann. **107**, 400 (1933) und *Prace Matematyczno - Fizyczne,* **41**, 177 (1934) (deutsch)—zu § 2 (zu den Behauptungen über Lösungen der Feldgleichungen bei gekrümmtem Untergrund).